ALGEBRA II - Práctica N°5 - Segunda parte - Primer cuatrimestre de 2003

Módulos: Continuación.

Ejercicio 1. Exhibir sumandos directos G y F de $\mathbb{Z}^2$ como $\mathbb{Z}$-módulo tales que $G+F$ no sea un sumando directo.

Ejercicio 2. Sea A un anillo, sea M un A-módulo y sean S y T submódulos de M tales que $S \subset T$. Probar que:

i) Si S es sumando directo de M, entonces S es sumando directo de T.

ii) Si S es sumando directo de T y T es sumando directo de M, entonces S es sumando directo de M.

Ejercicio 3. Sea A un anillo y sea $f : M \to N$ un epimorfismo de A-módulos. Si S es un submódulo de N tal que $f^{-1}(S)$ es un sumando directo de M, entonces S es un sumando directo de N.

Ejercicio 4. Sean G y H grupos abelianos finitos. Probar que todo subgrupo de $G \oplus H$ es de la forma $S \oplus T$ con S subgrupo de G y T subgrupo de H si y sólo si los órdenes de G y H son coprimos.

Ejercicio 5. Sea p un número primo positivo. Se considera $f : \mathbb{Z}_{p^\infty}^2 \to \mathbb{Z}_{p^\infty}^2$ la aplicación definida por $f(x, y_)= (x, y + p.x)$. Si $H = \{(x, 0) \ / \ x \in \mathbb{Z}_{p^\infty}\}$, probar:

i) $f \in \mathrm{Aut}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_{p^\infty}^2)$.

ii) H y $f(H)$ son sumandos directos de $\mathbb{Z}_{p^\infty}^2$.

iii) $H \cap f(H)$ no es un sumando directo de $\mathbb{Z}_{p^\infty}^2$.

Ejercicio 6. Sea G un grupo abeliano y sean S y T subgrupos de G tales que $G = S \oplus T$. Probar que si existe un monomorfismo de $\mathbb{Q}$ en G entonces existe un monomorfismo de $\mathbb{Q}$ en S o existe un monomorfismo de $\mathbb{Q}$ en T.

Ejercicio 7. Sea A un anillo, sea M un A-módulo y sea $\mathcal{S}$ un sistema de generadores de M. Se dice que $\mathcal{S}$ es un *sistema de generadores minimal* de M si ningún subconjunto propio de $\mathcal{S}$ es un sistema de generadores de M. Probar que:

i) Todo módulo finitamente generado posee un sistema de generadores minimal.

ii) $\mathbb{Q}$ como $\mathbb{Z}$-módulo no posee un sistema de generadores minimal.

Ejercicio 8.

i) Probar que $\mathbb{Q}$ no es un grupo libre.

ii) Probar que $(\mathbb{Q}_{>0}, .)$ es un grupo libre.

Ejercicio 9. Sea A un dominio íntegro y sea $a \in A^{n\times n}$. Para cada $1 \leq j \leq n$ sea $v_j = (a_{1j}, \ldots, a_{nj}) \in A^n$. Probar que

i) $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es linealmente independiente si y sólo si $det(a) \neq 0$.

ii) $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es un sistema de generadores de A^n si y sólo si $det(a) \in \mathcal{U}(A)$.

iii) Si $A = \mathbb{Z}$ probar que $< (a_1, \ldots, a_n) >$ es un sumando directo de $\mathbb{Z}^n$ si y sólo si $\text{mdc}(a_1, \ldots, a_n) = 1$.

Ejercicio 10. Sea A un anillo y M un A-módulo. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

i) De todo sistema de generadores de M puede extraerse una base.

ii) Todo conjunto linealmente independiente en M puede extenderse a una base.

iii) Todo submódulo de un módulo libre es libre.

iv) Si $x \in M$ es no nulo entonces $\{ x \}$ es linealmente independiente.

v) Existen módulos libres con elementos no nulos que son linealmente dependientes.

vi) Existen módulos no libres tales que todo elemento no nulo es linealmente independiente.

vii) Si A es un anillo íntegro y M es un A-módulo libre entonces todo elemento no nulo de M es linealmente independiente.

Ejercicio 11. Para un anillo A conveniente dar un ejemplo de:

i) Un A-módulo finitamente generado que no sea Noetheriano.

ii) Un A-módulo tal que todo submódulo propio sea finitamente generado y que no sea Noetheriano.

Ejercicio 12. Sea A un anillo y sea M un A-módulo. Si $f \in End_A(M)$, probar que:

i) $Ker(f) = Ker(f^2) \Rightarrow Ker(f) \cap Im(f) = 0$.

ii) $Im(f) = Im(f^2) \Rightarrow Ker(f) + Im(f) = M$.

iii) Si M es Noetheriano entonces $\exists\, n \in \mathbb{N}$ tal que $Ker(f^n) \cap Im(f^n) = \{0\}$.

iv) Si M es Noetheriano y f es un epimorfismo entonces f es un automorfismo.