ALGEBRA II - Práctica N°2 - Primer cuatrimestre de 2003

Cocientes. Productos semidirectos.

Ejercicio 1. Sea G un grupo y sea H un subgrupo de G. Si $x \in G$ se definen los conjuntos

$$xH := \{x.h \ / \ h \in H\}$$
$$Hx := \{h.x \ / \ h \in H\}$$
$$x^{-1}Hx := \{x^{-1}.h.x \ / \ h \in H\}.$$

Probar que las siguientes condiciones son equivalentes:

i) $\forall x \in G \ \forall h \in H \ \ x.h.x^{-1} \in H$

ii) $\forall x \in G \ xH = Hx$

iii) $\forall x \in G \ x^{-1}Hx \subset H$

iv) $\forall x \in G \ x^{-1}Hx = H$

Cuando H verifica cualquiera de las condiciones anteriores se dice que H es un **subgrupo normal, invariante o distinguido** de G y se nota $H \triangleleft G$.

Ejercicio 2. Si G es un grupo abeliano, probar que todo subgrupo H de G es normal. Probar que el grupo cuaterniónico $\mathcal{H}$ es un contraejemplo para la recíproca de esta afirmación.

Ejercicio 3. Decidir cuáles de los subgrupos del ejercicio 10 de la Práctica 1 son normales.

Ejercicio 4. Probar que para todo grupo G, $[G, G] \triangleleft G$ y $\mathcal{C}(G) \triangleleft G$.

Ejercicio 5.

i) Sea G un grupo y sean $K \subset H$ subgrupos de G. Probar que $K \triangleleft G \Rightarrow K \triangleleft H$.

ii) Dados los siguientes subgrupos de S_4

$$K = \{id, (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3)\}$$
$$H = \{id, (1\ 2)(3\ 4)\}$$
$$U = <(1\ 2\ 3\ 4)>$$

a) Probar que $H \triangleleft K$, $K \triangleleft A_4$ y $K \triangleleft S_4$.

b) Probar que H no es normal en A_4 ni en S_4.

c) Determinar si $U \triangleleft S_4$.

Ejercicio 6.

i) Sea G un grupo y sea H un subgrupo de G de índice n. Sea Ω el conjunto de coclases a derecha Ha ($a \in G$).

a) Para cada $x \in G$ se define

$$\begin{aligned} \varphi_x : \Omega &\longrightarrow \Omega \\ Ha &\longrightarrow Hax^{-1} \end{aligned}$$

Probar que $\varphi_x \in S_\Omega$ para todo $x \in G$.

b) Probar que la aplicación $\varphi : G \longrightarrow S_\Omega$ definida por $\varphi(x) = \varphi_x$ es un morfismo de grupos.

c) Sea $K = \mathrm{Ker}(\varphi)$. Probar que K es un subgrupo normal de G, contenido en H, y que $[G : K]$ divide a $n!$

ii) Sea G un grupo finito de orden m y sea p el menor primo que divide a m. Probar que si H es un subgrupo de G de índice p entonces $H \triangleleft G$.

iii) Sea G un grupo finito de orden mp, con p primo tal que $p \geq m$. Probar que si H es un subgrupo de G de orden p entonces $H \triangleleft G$.

Ejercicio 7. En cada uno de los siguientes casos hallar un sistema de representantes a izquierda de G módulo H y determinar $[G : H]$:

i) $G = \mathbb{R} \qquad H = \mathbb{Z}$

ii) $G = GL(n, K) \qquad H = SL(n, K)$ con K cuerpo.

iii) $G = D_n \qquad H =< \rho >$

iv) $G = \mathbb{C}^* \qquad H = S^1$

v) $G = \mathbb{C}^* \qquad H = \mathbb{R}^* \cup \mathbb{R}^* i$

vi) $G = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^- \qquad H = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^- \ / \ a \equiv b \ (\mathrm{mod}\ 2)\}$

Ejercicio 8. Calcular todos los cocientes de S_3, D_4 y $\mathcal{H}$.

Ejercicio 9. Probar que

i) $\mathbb{C}^* / \mathbb{R}_{>0} \simeq S^1$

ii) $\mathbb{Z} / m.\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}_m$

iii) $\mathbb{Q}^* / \mathbb{Q}_{>0} \simeq G_2$

iv) $S^1 / G_n \simeq S^1$

v) Si $m \mid n$ entonces $G_n \big/ G_m \simeq G_{\frac{n}{m}}$

Ejercicio 10. En cada uno de los siguientes casos, probar que $H \lhd G$ y caracterizar $G/_H$

i) $G = S_4 \qquad H = \{\, id,\ (1\ 2)(3\ 4),\ (1\ 3)(2\ 4),\ (1\ 4)(2\ 3)\,\}$

ii) $G = D_6 \qquad H = \{\, 1,\ \rho^3\}$

iii) $G = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 1 & a \\ 0 & b \end{smallmatrix}\right) / \, a, b \in \mathbb{Z}_6 \text{ y } (b, 6) = 1 \right\} \qquad H = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \right\}$

iv) $G = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 1 & a \\ 0 & b \end{smallmatrix}\right) / \, a, b \in \mathbb{Z}_6 \text{ y } (b, 6) = 1 \right\} \qquad H = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \right\}$

v) G y H como en el Ejercicio 7.

Ejercicio 11. Sea G un grupo y H un subgrupo. Probar que

$[G; G] \subseteq H \Leftrightarrow H \lhd G$ y G/H es abeliano.

Ejercicio 12.

i) Sea $f : G \longrightarrow G'$ un isomorfismo de grupos y sea $H \lhd G$. Si $H' = f(H)$, probar que

a) $H' \lhd G'$

b) $G \big/ \mathrm{H} \simeq G' \big/ \mathrm{H'}$

ii) ¿Es cierto que si $f : G \longrightarrow G'$ es un isomorfismo, $g : H \longrightarrow H'$ es un isomorfismo, $H \lhd G$, $H' \lhd G'$ entonces $G \big/ \mathrm{H} \simeq G' \big/ \mathrm{H'}$?

Ejercicio 13. Sea G un grupo. Sea $a \in G$ y sea $I_a : G \longrightarrow G$ definida por $I_a(g) = a.g.a^{-1}$.

i) Probar que I_a es un automorfismo de G (este tipo de automorfismos se llaman **automorfismos interiores** de G).

ii) Probar que la aplicación $I : G \longrightarrow Aut(G)$ definida por $I(a) = I_a$ es un morfismo de grupos. Calcular su núcleo y probar que su imagen (que se nota $Int(G)$) es un subgrupo normal de $Aut(G)$.

(iii) Caracterizar $Int(G)$ como un cociente de G.

Ejercicio 14. Sea p un primo mayor o igual que 3. Si G es un grupo tal que $|G| = 2p$, probar que $G \simeq \mathbb{Z}_{2p}$ o $G \simeq D_p$.

Ejercicio 15. Sea G un grupo y sean H, K subgrupos de G. Se define

$$HK = \{x.y : x \in H,\ y \in K\}.$$

i) Probar que, si G es finito, $|H|.|K| = \#(HK).|H \cap K|$.

ii) Probar que, si G es finito, $[G : H \cap K] \leq [G : H].[G : K]$.

iii) ¿Es cierto que HK es subgrupo de G?

iv) Probar que si H es normal ó K es normal entonces HK es subgrupo de G.

v) Probar que si H y K son subgrupos normales de G entonces HK es un subgrupo normal de G y $HK = KH$.

Definición. Sea G un grupo y sean H y K subgrupos de G. Se dice que G es el **producto semidirecto (interno)** de H y K (y se nota $G = H \underset{sd}{\cdot} K$) si $H \triangleleft G$, $H \cap K = \{1\}$ y $G = HK$.

Ejercicio 16. Determinar si existe un subgrupo K de G tal que $G = H \underset{sd}{\cdot} K$ en cada uno de los siguientes los casos:

i) $G = \mathbb{C}^*$	$H = S^1$
ii) $G = \mathbb{C}$	$H = \mathbb{R}$
iii) $G = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^-$	$H = \{\, (m, 0) \,/\, m \in \mathbb{Z} \,\}$
iv) $G = \mathcal{H}$	H un subgrupo no trivial
v) $G = S_n$	$H = A_n$
vi) $G = D_n$	$H = < \rho >$

Ejercicio 17. Sea G un grupo y sean H y K subgrupos de G tales que $G = H \underset{sd}{\cdot} K$.

i) Probar que si $K \triangleleft G$ entonces $h.k = k.h \quad \forall\, h \in H,\ \forall\, k \in K$.

ii) Deducir que G es abeliano si y sólo si H y K son abelianos y $K \triangleleft G$.

Ejercicio 18. Sean $(G_1, *_1)$ y $(G_2, *_2)$ grupos y sea $\tau : G_2 \longrightarrow Aut(G_1)$ un morfismo de grupos. Sea $G = \{\, (x, y) \,/\, x \in G_1 \,,\, y \in G_2 \,\}$. Si (a, b), $(c, d) \in G$ definimos

$$(a, b) \cdot_{\tau} (c, d) = (a *_1 \tau(b)(c), b *_2 d)$$

i) Probar que $(G, \cdot_{\tau})$ es un grupo. Este grupo se llama el **producto semidirecto (externo)** entre G_1 y G_2 vía τ y se nota $G_1 \cdot_{\tau} G_2$

ii) Probar que $G_1 \cdot_{\tau} G_2$ es abeliano si y sólo si G_1 y G_2 son abelianos y $\tau(b) = id_{G_1}$ para todo $b \in G_2$.

iii) Interpretar $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^-$ como un producto semidirecto externo entre $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Z}$.

iv) Sea $n \geq 3$ y sea $\theta : \mathbb{Z}_2 \longrightarrow Aut(\mathbb{Z}_n)$ la aplicación definida por $\theta(a)(x) = (-1)^a x$. Probar que θ es un morfismo de grupos y caracterizar $\mathbb{Z}_n \cdot_\theta \mathbb{Z}_2$.

Ejercicio 19. Sean G_1 y G_2 grupos y sea $\theta : G_2 \longrightarrow Aut(G_1)$ un morfismo de grupos. Sea $G = G_1 \cdot_\theta G_2$ y sean $H = \{ (a, b) \in G / b = 1 \}$ y $K = \{ (a, b) \in G / a = 1 \}$.

Probar que H y K son subgrupos de G y que $G = H \underset{sd}{\cdot} K$.

Ejercicio 20. Sea G un grupo y sean H y K subgrupos de G tales que $H \triangleleft G$. Sea $\theta : K \longrightarrow Aut(H)$ la aplicación definida por $\theta(k)(h) = khk^{-1}$. Probar que:

i) θ está bien definida (es decir, $\theta(k) \in Aut(H) \quad \forall\, k \in K$).

ii) θ es un morfismo de grupos.

iii) Si $G = H \underset{sd}{\cdot} K$ entonces $G \simeq H \cdot_\theta K$.

Ejercicio 21. Sean H y K grupos y sean $\theta, \tau : K \longrightarrow Aut(H)$ morfismos. Probar que si existe $\varphi \in Aut(K)$ tal que $\theta = \tau \circ \varphi$ entonces $H \cdot_\theta K \simeq H \cdot_\tau K$.

Ejercicio 22.

i) Sea G un grupo finito y sean H y K subgrupos de G tales que $H \triangleleft G$.

Probar que $G = H \underset{sd}{\cdot} K$ si y sólo si $|G| = |H|.|K|$ y $H \cap K = \{1\}$.

Deducir que si $|G| = |H|.|K|$ y $(|H|, |K|) = 1$ entonces $G = H \underset{sd}{\cdot} K$.

ii) Caracterizar todos los grupos de orden p^2 (p primo).

Ejercicio 23. Probar que existe un grupo G no abeliano de orden 12 no isomorfo a A_4 ni a D_6. (Sugerencia: considerar los posibles productos semidirectos de $\mathbb{Z}_4$ por $\mathbb{Z}_3$).