ALGEBRA II - Práctica N°3 - Primera Parte - Primer cuatrimestre de 2003

Acción de un grupo sobre un conjunto

Ejercicio 1. Sea $(G,*)$ un grupo que actúa sobre un conjunto X no vacío.
Si S es un subconjunto no vacío de X, se define

$$G_S = \{\, g \in G \,/\, g.S = S \,\} \qquad \text{(estabilizador de } S \text{ en } G\text{)}$$

y si T es un subconjunto no vacío de G, se define

$$N(T,G) = \{\, g \in G \,/\, g * T * g^{-1} = T \,\} \qquad \text{(normalizador de } T \text{ en } G\text{)}$$

y

$$\mathcal{C}(T,G) = \{\, g \in G \,/\, g * t = t * g \quad \forall t \in T \,\} \qquad \text{(centralizador de } T \text{ en } G\text{).}$$

Notación: Si $x \in X$ y $g \in G$, $G_x := G_{\{x\}}$, $N(g,G) := N(\{g\},G)$ y $\mathcal{C}(g,G) := \mathcal{C}(\{g\},G)$.

i) Probar que:

a) G_S, $N(T,G)$ y $\mathcal{C}(T,G)$ son subgrupos de G.

b) Si $X = G$ y la acción está definida por $g.x = g * x * g^{-1}$ entonces $N(T,G) = G_T$ y $\mathcal{C}(T,G) = \bigcap_{t \in T} G_t = \bigcap_{t \in T} \mathcal{C}(t,G)$ para todo subconjunto T de G.

c) Si H es un subgrupo de G, $X = \{\, y*H*y^{-1} \,/\, y \in G \,\}$ y la acción es $g.x = g*x*g^{-1}$ $(g \in G,\ x \in X)$ entonces $G_T = N(T,G)$ para todo $T \in X$.

d) Si $X = H$, con H un subgrupo invariante de G y la acción está definida en la forma $g.h = g * h * g^{-1}$ entonces $G_h = \mathcal{C}(h,G)$.

ii) Hallar $N(T,G)$ y $\mathcal{C}(T,G)$ en cada uno de los siguientes casos:

a) $G = S_5 \qquad T = \{\, (1\ 2)\,,\ (3\ 4)\,\}$

b) $G = D_4 \qquad T = \{\, s,\ s\rho \,\}$

Ejercicio 2. En cada uno de los siguientes casos probar que **.** es una acción de G en X y calcular ${}^G X = \{\, x \in X \,/\, g.x = x \quad \forall g \in G \,\}$ y las G-órbitas y el estabilizador de cada elemento de X

i) $G = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax + b \text{ con } a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R}\}$, $X = \mathbb{R}$ y $f.x = f(x)$

ii) $G = \{\, f \in End(\mathbb{R}^2) \,/\, d(f(x), f(y)) = d(x,y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^2 \,\}$
$X = \mathbb{R}^2 \qquad f.x = f(x)$

iii) $G = \mathbb{R}^* \qquad X = \mathbb{R}_{>0} \qquad a.x = x^a$

iv) $G = SL_2(\mathbb{Z})$ $\qquad X = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ $\qquad \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right).(x, y) = (ax + by, cx + dy)$

Ejercicio 3. Sea X un conjunto finito. Determinar el número posible de acciones de $\mathbb{Z}$ sobre X.

Ejercicio 4. Sea $(G, *)$ un grupo finito y sean H y K subgrupos de G.

i) Sea $G' = H \times K$ con el producto definido por

$$(h, k).(h', k') = (h * h', k * k')$$

y sea $X = HK = \{\, h * k \,/\, h \in H,\ k \in K \,\}$.

Si $(h, k) \in G'$ y $x \in X$, definimos $(h, k).x = hxk^{-1}$

Probar que . es una acción de G' sobre X, que $G'_1 \simeq H \cap K$ y que $O_1 = HK$

ii) Deducir de i) otra demostración de que $|H|.|K| = \#(HK).|H \cap K|$. (ver Práctica 2, Ejercicio 15).

Ejercicio 5. Sea G un grupo actuando sobre un conjunto X y $S \lhd G$. Determinar la condición necesaria y suficiente para que exista una acción de G/S en X tal que $\bar{a}.x = a.x \quad \forall\, a \in G$ y $\forall\, x \in X$.

Ejercicio 6. Sea G un grupo.

i) Probar que si $|G| = p^n$ con p primo y $n \in \mathbb{N}$ entonces $\mathcal{C}(G) \neq \{1\}$. Caracterizar los grupos simples de orden p^n.

ii) Probar que si $G/_{\mathcal{C}(G)}$ es cíclico entonces G es abeliano.

iii) Probar que si $|G| = p^2$ con p primo entonces G es abeliano.

iv) Caracterizar todos los grupos de orden p^2 con p primo (comparar con Práctica 2, Ejercicio 22).

v) Dar un ejemplo de un grupo G no abeliano tal que $G/_{\mathcal{C}(G)}$ sea abeliano.

Ejercicio 7. Sea p primo.

i) Sea G un grupo no abeliano tal que $|G| = p^3$. Probar que $\mathcal{C}(G) = [G; G]$ y caracterizar $G/_{\mathcal{C}(G)}$.

ii) Calcular $[G; G]$ con $G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \,/\, a, b, c \in \mathbb{Z}_p \right\}$.

Ejercicio 8. Sea G un grupo tal que $|G| = 2n$, G tiene n elementos de orden 2 y los restantes forman un subgrupo H. Probar que entonces n es impar y $H \triangleleft G$.

Ejercicio 9. Sea p primo y $|G| = n$. Probar que

$\exists\ k$ tal que $n = p^k \Leftrightarrow \forall x \in G$, $ord(x) = p^s$ para algún s. (s depende de x)

Ejercicio 10. Sean p y q primos positivos tales que $p > q$.

i) Probar que si q no divide a $p - 1$ entonces todo grupo de orden pq es cíclico.

ii) Probar que si $q|p - 1$ entonces hay exactamente dos grupos no isomorfos de orden pq: uno cíclico y el otro no abeliano.