ALGEBRA II - Práctica N°6 - Primer cuatrimestre de 2003

Módulos: continuación.

Ejercicio 1. Sea A un anillo y M un A-módulo. Decidir si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa:

i) Si M es libre, entonces es sin torsión.

ii) Si A es íntegro entonces M libre $\Rightarrow M$ sin torsión.

iii) Si $f : M \longrightarrow N$ es un morfismo de A-módulos y M es de torsión entonces $Im(f)$ es de torsión.

iv) Si $f : M \longrightarrow N$ es un morfismo de A-módulos y M es sin torsión entonces $Im(f)$ es sin torsión.

v) Si A es conmutativo y N es sin torsión entonces $Hom_A(M, N)$ es sin torsión.

vi) Si A es conmutativo, M es de torsión y N es sin torsión entonces $Hom_A(M, N) = 0$.

Ejercicio 2. Calcular $t\left(\mathbb{R}/_{\mathbb{Z}}\right)$.

Ejercicio 3. Sea A un dominio principal que no es un cuerpo y sea M un A-módulo. Probar:

i) Sea $p \in A$ un irreducible y $a \in A - \{0\}$. Entonces $(A/ < a >)[p] \simeq A/ < p^n >$ donde $n = \max\{k \in \mathbb{N}_0 \ / \ p^k | a\}$.

ii) M es simple $\iff \exists\, p \in A$ irreducible tal que $M \simeq A/ < p >$.

iii) M es un A-módulo sin torsión $\iff Hom_A(S, M) = 0$ para todo A-módulo simple S.

Ejercicio 4. Sea A un dominio principal y sea M un A-módulo de tipo finito (es decir finitamente generado). Probar:

i) M es de torsión $\iff Hom_A(M, A) = 0$.

ii) M es indescomponible (es decir, no tiene sumandos directos propios) $\iff M \simeq A$ o $\exists\, p \in A$ irreducible y $n \in \mathbb{N}$ tales que $M \simeq A/ < p^n >$.

Ejercicio 5. Sea A un dominio principal y sea M un A-módulo. Probar:

i) Si M es de tipo finito y S es un submódulo libre de M tal que M/S es sin torsión, entonces M es libre.

ii) Si M no es de torsión y M/S es de tipo finito con torsión para todo submódulo $S \neq 0$ de M, entonces $M \simeq A$. Análogamente, si G es un grupo infinito tal que todo subgrupo no nulo tiene índice finito, $G \simeq \mathbb{Z}$.

Ejercicio 6. Sea p un primo positivo. Clasificar todos los grupos abelianos de orden p^3, p^4 y p^5.

Ejercicio 7. Clasificar los grupos abelianos de orden 18, 45, 100 y 180.

Ejercicio 8.

i) Sea G un grupo abeliano finito y sea p un primo positivo que divide al orden de G. Probar que el número de elementos de orden p en G es coprimo con p.

ii) Para cada grupo abeliano G de orden p^2q^2 (donde p y q son primos distintos) determinar cuántos elementos de orden pq y cuántos elementos de orden pq^2 hay en G.

Ejercicio 9. Caracterizar los grupos abelianos finitamente generados tales que:

i) Todo subgrupo propio de G es cíclico.

ii) Todo subgrupo propio de G es de orden primo.

iii) G posee exactamente 2 subgrupos propios no nulos.

iv) G posee exactamente 3 subgrupos propios no nulos.

v) Todo subgrupo propio no nulo de G es maximal.

vi) Para todo par de subgrupos S y T de G, $S \subseteq T$ o $T \subseteq S$.

vii) El orden de todo elemento no nulo de G es primo.

viii) $G/_S$ es cíclico para todo subgrupo S no nulo de G.

ix) Todo par de subgrupos propios no nulos son isomorfos.

Ejercicio 10. Calcular los factores invariantes (coeficientes de estructura) de los siguientes grupos abelianos:

i) $\mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_6 \oplus \mathbb{Z}_9$.

ii) $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_8 \oplus \mathbb{Z}_{14}$.

iii) $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_{49} \oplus \mathbb{Z}$.

iv) $\mathbb{Z}_{12} \oplus \mathbb{Z}_{21} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_{20} \oplus \mathbb{Z}_9 \oplus \mathbb{Z}_7$.

v) G un grupo abeliano de orden 36 que tiene exactamente 2 elementos de orden 3 y que no tiene elementos de orden 4

vi) G un grupo abeliano de orden 225 que tiene por lo menos 40 elementos de orden 15 y tal que todo subgrupo de orden 9 de G es isomorfo a $\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3$

Ejercicio 11. Determinar los factores invariantes de los siguientes grupos abelianos dados por generadores y relaciones:

i) $G =< a, b, c >; \quad 2a + 3b = 0; \quad 2a + 4c = 0$

ii) $G =< a, b, c >; \quad a = 3b; \quad a = 3c$

iii) $G =< a, b, c >; \quad 3a = -c; \quad 3a = 3c - 8b$

iv) $G ==< a, b, c >; \quad 3a = b; \quad b = 3c$

Ejercicio 12. Calcular los coeficientes de estructura de los siguientes cocientes:

i) $\mathbb{Z}^4/S$ con $S = \{m \in \mathbb{Z}^4 \ / \ m_1 + m_2 + m_3 + m_4 = 0, \ m_1 + m_2 - 2m_3 = 0\}$.

ii) $\mathbb{Z}^3/S$ con $S = \{m \in \mathbb{Z}^3 \ / \ m_1$ es par, $m_1 + 5m_2 - m_3 = 0\}$.

iii) $\mathbb{Z}^3/S$ con $S = \{m \in \mathbb{Z}^3 \ / \ m_1 = m_2 + m_3$ es par, $3|m_3\}$.

Ejercicio 13. Sean p, q y r primos positivos. Determinar la cantidad de grupos no isomorfos de orden n, en cada uno de los siguientes casos:

i) $n = p^6 q^3 r$.

ii) $n = p^2 q^4 r^5$.

iii) $n = p^3 q^4$.

Ejercicio 14.

i) Sea G un grupo abeliano de orden n. Probar que si d es un divisor de n, G posee subgrupos y grupos cocientes de orden d.

ii) Sea $n \in \mathbb{N}$. ¿Para qué divisores d de n existe un grupo abeliano de orden n y exponente d?

iii) Caracterizar los grupos abelianos finitos de orden menor o igual que 100 de exponente 9, 20 y 21.

iv) Sea G un grupo abeliano y sea $x \in G$ un elemento tal que $\mathrm{ord}(x) = \exp(G)$. Probar que $< x >$ es un sumando directo de G.

Ejercicio 15. Sea H un subgrupo de $\mathbb{Z}^n$.

i) Probar que $[\mathbb{Z}^n : H]$ es finito si y sólo si H es de rango n.

ii) Si H es de rango n, sea $\{v_1, \ldots, v_n\}$ una base de $\mathbb{Z}^n$ y sea $\{h_1, \ldots, h_n\}$ una base de H. Si $h_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} v_i$, probar que $[\mathbb{Z}^n : H] = |\det(a_{ij})|$.

Definición: Sea A un anillo y sea M un A-módulo (a izquierda). M se dice *semisimple* si es suma directa de submódulos simples. A se dice *semisimple* si es semisimple como A-módulo (a izquierda).

Ejercicio 16. Sea A un anillo y sea M un A-módulo. Probar que son equivalentes:

i) Todo submódulo de M es sumando directo de M.

ii) M es semisimple.

iii) M es suma (no necesariamente directa) de submódulos simples.

Ejercicio 17.

i) Probar que el anillo producto de dos anillos semisimples es semisimple.

ii) Hallar todos los $n \in \mathbb{N}$ tales que $\mathbb{Z}_n$ es un anillo semisimple.

Ejercicio 18. Sea K un cuerpo de característica 0 y sea G un grupo finito. Se considera el elemento $\iota = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g \in K[G]$.

i) Probar que si M es un $K[G]$-módulo entonces ιM es un submódulo de M.

ii) Dado un $K[G]$-módulo M, se define el submódulo de invariantes como $M^G := \{m \in M \mid gm = m \ \forall g \in G\}$. Probar que $M^G = \iota M$.

iii) Si M y N son $K[G]$-módulos, probar que $Hom_K(M, N)$ (el conjunto de transformaciones K-lineales de M en N) tiene una estructura de $K[G]$-módulo: la acción por un elemento de G está definida por $(g \cdot f)(m) = g(f(g^{-1}m))$ y se extiende linealmente para cualquier elemento de $K[G]$.

iv) Probar que $Hom_{K[G]}(M, N) = (Hom_K(M, N))^G$.

v) Probar que $K[G]$ es semisimple. (Sugerencia: todo subespacio de un espacio vectorial es un sumando directo, luego la inclusión es una sección de K-espacios vectoriales. Usar esto y lo anterior para probar que la inclusión de cualquier ideal de $K[G]$ es una sección de $K[G]$-módulos.)

Ejercicio 19. Sea A un anillo y sean $\{M_i\}_{1 \leq i \leq r}$ A-módulos simples tales $M_i \not\simeq M_j$ si $i \neq j$. Sean $\{n_i\}_{1 \leq i \leq r}$ números naturales. Probar que:

i) $End(\oplus_{i=1}^r n_i M_i) \simeq \oplus_{i=1}^r End(n_i M_i)$

ii) Si $D_i = End(M_i)$, (un anillo de división por Schur) entonces $End(n_i M_i) \simeq (D_i)^{n_i \times n_i}$ (matrices de $n_i \times n_i$ a coeficientes en D_i). Luego, si $A = \oplus_{i=1}^r n_i M_i$, como $A \simeq End(A)$ como anillos, resulta que $A \simeq \prod_{i=1}^r (D_i)^{n_i \times n_i}$.

Ejercicio 20. Sea K un cuerpo.

i) Probar que $K^{n \times n}$ es semisimple con un sólo módulo simple (salvo isomorfismos). Caracterizar el módulo simple.

ii) Sean $\{n_i\}_{1 \leq i \leq r}$ números naturales. Probar que $A = \prod_{i=1}^r (K)^{n_i \times n_i}$ es semisimple y encontrar sus módulos simples. Observar que si se descompone como A-módulo $A \simeq \oplus_{i=1}^r n_i I_i$, donde los I_i son módulos simples no isomorfos entre sí, entonces $n_i = dim_K(I_i)$. En particular, $dim_K A = \sum_{i=1}^r n_i^2$.

Ejercicio 21.

i) Sea K un cuerpo. Observar que si $A = \prod_{i=1}^{k} K^{n_i \times n_i}$, entonces A es un anillo conmutativo si y sólo si $n_i = 1$ $\forall i$.

(*) ii) Encontrar los módulos simples sobre $\mathbb{C}[S_3]$.

(*) iii) Encontrar los módulos simples sobre $\mathbb{C}[G_3]$.

(*) iv) Encontrar los módulos simples sobre $\mathbb{R}[G_3]$.