Algebra II - Práctica 1.

Segundo cuatrimestre de 2003.

1. Sea $n \in \mathbb{N}$ y sea $G_n = \{z \in \mathbb{C} / z^n = 1\}$.

   (a) Probar que $(G_n\,,\cdot)$ es un grupo abeliano y hallar z^{-1} para cada $z \in G_n$.

   (b) Probar que G_n es cíclico, es decir, que existe $w \in G_n$ que satisface: $\forall\, z \in G_n$ $\exists\, k \in \mathbb{Z}$ tal que $z = w^k$.

2. Sea $G = \mathbb{Z}_n = \{a \in \mathbb{Z}/0 \le a < n\}$ con $a * b = r_n(a+b)$. Probar que $(\mathbb{Z}_n, *)$ es un grupo y determinar si es abeliano.

3. Sea $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \,/\, |z| = 1\}$.

   (a) Probar que $(S^1, \cdot)$ es un grupo abeliano y hallar z^{-1} para cada $z \in S^1$.

   (b) Determinar si S^1 es cíclico.

4. En cada uno de los siguientes casos determinar si $(G, *)$ es un grupo y, en caso afirmativo, determinar si es abeliano:

   (a) $G = \mathbb{N}_0 \qquad a * b = [a, b]$.

   (b) $G = \mathbb{Q}_{>0} \qquad a * b = a \cdot b$.

   (c) $G = M_3(\mathbb{Z}) \qquad a * b = a \cdot b$.

   (d) $G = M_n(\mathbb{R}) \qquad a * b = a + b$.

   (e) $G = SL_n(\mathbb{R}) = \{a \in M_n(\mathbb{R}) \,/\, det\ a = 1\} \qquad a * b = a \cdot b$.

   (f) $G = End_K(V)$, con V un K-espacio vectorial $\qquad f * g = f \circ g$.

   (g) $G = \{f \in End_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n) \,/\, d(f(x), f(y)) = d(x, y)\ \forall\, x, y \in \mathbb{R}^n\} \qquad f * g = f \circ g$.

   (h) $G = S(X) = \{f : X \longrightarrow X \,/\, f$ es biyectiva$\}$, donde X es un conjunto no vacío y $f * g = f \circ g$.
   Notación: Cuando $X = \{1, \ldots, n\}$ $S(X)$ será notado S_n.

   (i) $G = S(\mathbb{Z}) \qquad f * g = f \circ g^{-1}$.

   (j) $G = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \qquad (a, b) * (c, d) = (r_2(a + c), r_2(b + d))$.

   (k) $G = \mathcal{U}_n = \{a \in \mathbb{Z}_n \,/\, (a, n) = 1\} \qquad a * b = r_n(a \cdot b)$.

5. Probar que

   (a) $G_n \subseteq G_m$ si y sólo si $n \mid m$.

   (b) $G_n \cap G_m = G_{(n,m)}$.

6. En cada uno de los siguientes casos, probar que H es un subgrupo de $(G, *)$:

   (a) $G = \mathbb{C}^* \qquad * = \cdot \qquad H = S^1$.

   (b) $G = D_4 \qquad * = \circ \qquad H = \{1,\, \rho,\, \rho^2,\, \rho^3\}$.

(c) $G = GL_n(\mathbb{C}) \qquad * = \cdot \qquad H = \mathcal{H}$

donde $\mathcal{H} = \left\{ \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \right\}$.

(d) $G = S^1 \qquad * = \cdot \qquad H = G_n$.

(e) $G = \mathbb{Z}_{2n} \qquad a * b = r_{2n}(a+b) \qquad H = \{a \in G \,/\, a \text{ es par}\}$.

(f) $G = GL_n(\mathbb{R}) \qquad * = \cdot \qquad H = SL_n(\mathbb{R})$.

7. Probar que todos los grupos de 4 elementos son abelianos. (Sug: hacer las posibles tablas de operaciones).

8. Sea G un grupo y sean H_1 y H_2 dos subgrupos de G.

   (a) Probar que $H_1 \cap H_2$ es un subgrupo.

   (b) Probar que $H_1 \cup H_2$ es un subgrupo si y sólo si $H_1 \subset H_2$ o $H_2 \subset H_1$.

9. Hallar todos los subgrupos cíclicos de: $\mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_5$, $\mathbb{Z}_6$, G_3, G_4, S_3, $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3$.

10. Sean G un grupo y $a \in G$. Probar que $C_a = \{x \in G;\ x \cdot a = a \cdot x\}$ es un subgrupo de G.

11. Probar que si H es un subgrupo de $\mathbb{Z}$ entonces existe $n \in \mathbb{N}_0$ tal que $H = n. \cdot \mathbb{Z}$.

12. Probar que si H es un subgrupo finito de $\mathbb{C}^*$ entonces existe $n \in \mathbb{N}_0$ tal que $H = G_n$.

13. Sean $(G, \cdot)$ un grupo y $a, b \in G$

   (a) Probar que las siguientes aplicaciones de G en G son biyectivas y encontrar sus inversas

      i. $x \longrightarrow a \cdot x$

      ii. $x \longrightarrow a \cdot x \cdot b$

      iii. $x \longrightarrow a \cdot x \cdot a^{-1}$

      iv. $x \longrightarrow x^{-1}$

      v. $x \longrightarrow a \cdot x^{-1} \cdot a^{-1}$

   (b) Determinar cuáles de estas aplicaciones son morfismos.

   (c) Idem en el caso en que G sea abeliano.

14. Hallar $ord(x)$ en los casos:

   (a) $G = S_8 \qquad x = (1\ 2)(5\ 6\ 7)$.

   (b) $G = \mathbb{Z}_{12} \qquad x = 2 \quad ; \quad x = 3 \quad ; \quad x = 4$.

   (c) $G = \mathcal{H} \qquad x = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$.

   (d) $G = S^1 \qquad x = \cos(\frac{2\pi}{n}) + i\ \sin(\frac{2\pi}{n})$.

   (e) $G = D_4 \qquad x = \rho^2\, s$.

   (f) G un grupo cualquiera y $x = a^d$, donde $a \in G$ es un elemento de orden n y d es un número natural.

15. Sea $f : G \longrightarrow G$ un morfismo de grupos. Probar que $ord(f(x))$ divide a $ord(x)$ si $ord(x)$ es finito.

16. Sea $x \in \mathbb{Z}_n$. Probar que $ord(x) = n$ si y sólo si $(x, n) = 1$.

17. (a) Calcular el orden de todos los elementos de S_3.
    (b) Sea $\sigma := (1\,3\,2)$,encontrar el subgrupo $C_\sigma = \{r \in S_3;\ r.\sigma = \sigma.r\}$.
    (c) Hallar, si existe, un $\sigma \in S_3$ tal que el subgrupo C_σ tenga orden 1; tenga orden 2; tenga orden 3; tenga orden 6.

18. (a) Hallar el orden de cada elemento de $\mathbb{Z}_{12}$ y determinar todos los $x \in \mathbb{Z}_{12}$ tales que el subgrupo cíclico generado por x coincide con $\mathbb{Z}_{12}$.
    (b) Hallar el orden de cada elemento de $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3$ y en $\mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_6$.
    (c) Inspirándose en ii) probar que si G_1 y G_2 son grupos finitos, el orden de un elemento (g_1, g_2) en $G_1 \oplus G_2$ es el mínimo común múltiplo entre los órdenes de g_1 y g_2.

19. Sea p un número primo, $m \in \mathbb{N}$ y sea G un grupo de orden p^m. Probar que existe un elemento de orden p en G.

20. Determinar si G y K son isomorfos en los casos:

    (a) $G = \mathbb{Z}_4 \qquad K = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$.
    (b) $G = \mathbb{Z}_n \qquad K = G_n$.
    (c) $G = \mathbb{Z}_{10} \qquad K = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_5$.
    (d) $G = \mathbb{Q} \qquad K = \mathbb{R}$.
    (e) $G = \mathcal{U}_{16} \qquad K = \mathcal{H}$.
    (f) $G = \mathcal{U}_{16} \qquad K = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4$.

21. Dados los grupos:

$$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \qquad \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4 \qquad \mathbb{Z}_2 \oplus G_4 \qquad \mathbb{Z}_8$$

$$D_4 \qquad G_8 \qquad \mathcal{H} \qquad \mathcal{K}$$

    donde $\mathcal{K} = \{1,\ i,\ j,\ k,\ -1,\ -i,\ -j,\ -k\}$ con $i^2 = j^2 = -1$ y $i \cdot j = k = -j \cdot i$
    Decidir cuáles son abelianos, cuáles son cíclicos y cuáles son isomorfos entre sí.

22. Sea $f : G \longrightarrow L$ un epimorfismo. Decidir para cuáles P_i vale:
    "G verifica $P_i \Rightarrow L$ verifica P_i"

    (P_1) tener n elementos.
    (P_2) ser finito.
    (P_3) ser conmutativo.
    (P_4) ser no conmutativo.
    (P_5) ser cíclico.

(P_6) todo elemento tiene orden finito.

(P_7) todo elemento tiene orden 6.

(P_8) todo elemento tiene orden infinito.

23. Sea $f : G \longrightarrow L$ un monomorfismo. Decidir para cuáles P_i del ejercicio anterior vale: "L verifica $P_i \Rightarrow G$ verifica P_i".

24. (a) Probar que $Aut(\mathbb{Z}) \simeq G_2$.

    (b) Hallar $Hom(G_n\,,\,\mathbb{Z})$.

    (c) Hallar $Hom(G\,,\,\mathbb{Z})$ para G un grupo de orden finito.

25. Sea $G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \;/\; a, b \in \mathbb{Z}_7, \text{ con } a \neq 0 \right\}$.

    (a) Hallar el orden de G.

    (b) Para cada primo p que divide al orden de G hallar todos los elementos de G que tengan orden p.

26. Probar que $\{2, 3\}$ es un sistema de generadores de $\mathbb{Z}$.

27. Sea $G = M_2(\mathbb{Z}_2)$. Hallar $|G|$ y encontrar subgrupos de G de orden 2, 4 y 8.

28. (a) Probar que son equivalentes:

    i. G es abeliano.

    ii. La aplicación $f : G \longrightarrow G$ definida por $f(x) = x^{-1}$ es un morfismo de grupos.

    iii. La aplicación $f : G \longrightarrow G$ definida por $f(x) = x^2$ es un morfismo de grupos.

    (b) Probar que si $x^2 = 1$ para todo $x \in G$ entonces G es abeliano.

29. Probar que

    (a) $Hom(\mathbb{Z}\,,\,\mathbb{Z}_n) \neq 0$.

    (b) $Hom(\mathbb{Z}_5\,,\,\mathbb{Z}_7) = 0$.

    (c) $Hom(\mathbb{Q}\,,\,\mathbb{Z}) = 0$.

    (d) No existe un epimorfismo de $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.

30. Hallar dos grupos G y K no isomorfos tales que $Aut(G) \simeq Aut(K)$.

31. Sea $G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \;/\; a, b \in \mathbb{Z}_4, \text{ con } (a, 4) = 1 \right\}$. Probar que G es un grupo no abeliano de orden 8. ¿Es $G \simeq \mathcal{H}$? ¿Es $G \simeq D_4$?

32. Probar que si G es un grupo de orden ≤ 5, entonces es abeliano.