

Algebra II - Práctica 3.

Segundo cuatrimestre de 2003.

1. Si $G \simeq_d H.K$ con H y K abelianos, entonces G es abeliano.
2. Probar que S_n y D_n ; $n \geq 3$ son isomorfos a productos semidirectos convenientes.
3. ¿Es \mathcal{H} isomorfo a algún producto semidirecto?
4. Probar que S es un factor semidirecto de G en los siguientes casos:
 - (a) $G = \mathbb{C}^*$ $S = S^1$
 - (b) $G = G_{12}$ $S = G_3$
 - (c) $G = \mathbb{C}$ $S = \mathbb{R}$
 - (d) $G = GL(n, \mathbb{C})$ $S = SL(n, \mathbb{C})$
5. Probar en cada uno de los siguientes casos que el grupo G actúa sobre el conjunto X . En cada caso calcular ${}^G X$, las G -órbitas de X y el estabilizador de cualquier elemento de X
 - (a) $G = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax + b \text{ con } a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R}\}$, $X = \mathbb{R}$ y $f.x = f(x)$
 - (b) $G = \mathbb{R}^*$, $X = \mathbb{R}_{>0}$ y $a.x = x^a$ con $a \in \mathbb{R}^*$ y $x \in \mathbb{R}_{>0}$.
 - (c) $G = SL(2, \mathbb{Z})$, $X = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ y $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (ax + by, cx + dy)$
6. Sea G un grupo actuando sobre un conjunto X y $S \triangleleft G$. Determinar la condición necesaria y suficiente para que exista una acción de G/S en X tal que $\bar{a} \cdot x = a \cdot x \quad \forall a \in G$ y $x \in X$.
7. Sea X un conjunto finito. Determinar el número posible de acciones de \mathbb{Z} sobre X .
8. Sea G un grupo.
 - (a) Probar que si $|G| = p^n$ con p primo y $n \in \mathbb{N}$ entonces $\mathcal{C}(G) \neq 1$
 - (b) Probar que si $G/\mathcal{C}(G)$ es cíclico entonces G es abeliano
 - (c) Probar que si $|G| = p^2$ con p primo entonces G es abeliano
 - (d) Caracterizar todos los grupos de orden p^2 .
 - (e) Dar un ejemplo de un grupo G no abeliano tal que $G/\mathcal{C}(G)$ sea abeliano.
9. Sea G un grupo no abeliano tal que $|G| = p^3$. Probar que $\mathcal{C}(G) = [G; G]$ y calcular $|\mathcal{C}(G)|$.
10. Sea G un grupo tal que $|G| = 2n$, G tiene n elementos de orden 2 y los restantes forman un subgrupo H . Probar que entonces n es impar y $H \triangleleft G$.
11. Sea p primo y $|G| = n$. Entonces existe k tal que $n = p^k \Leftrightarrow \forall x \in G, \text{ord}(x) = p^s$ para algún s . (s depende de x)

12. G es un p -grupo $\Leftrightarrow \forall H \triangleleft G$, H y G/H son p -grupos.

13. Calcular todos los p - subgrupos de Sylow de:

$$\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_{12}, \mathbb{Z}_{21} \oplus \mathbb{Z}_{15}, S_3 \oplus \mathbb{Z}_3, S_3 \oplus S_3$$

14. Sea G un grupo, $|G| = pq$, $p > q$ primos tal que q no divide a $p - 1$. Probar que G es cíclico.

15. Un grupo de orden 56 no es simple.

16. Sean p, q primos, $|G| = p^2q$. Probar que G no es simple.

17. Probar que no existen grupos simples de los siguientes órdenes:

30, 36, 56, 96, 200, 204, 260, 2540, 9075.

18. Sea G con $|G| < \infty$ y $p < q$ primos tal que p^2 no divide a $|G|$. Sean H_p y H_q subgrupos de Sylow de G con $H_p \triangleleft G$. Probar

(a) $H_p \cdot H_q$ es subgrupo de G

(b) $H_p \cdot H_q \triangleleft G \Rightarrow H_q \triangleleft G$.