

Algebra II - Práctica 5.

Segundo cuatrimestre de 2003.

1. Probar que los siguientes conjuntos, con las operaciones definidas tienen estructura de anillo:

- (a) $(A^{n \times n}, +, \cdot)$ (matrices de $n \times n$, A anillo conmutativo).
- (b) $\{f : A \rightarrow A\}$, A anillo; $(f + g)(a) = f(a) + g(a)$; $(f \cdot g)(a) = f(a) \cdot g(a)$
- (c) $A_1 \times \dots \times A_n$; A_1, \dots, A_n anillos, suma y producto coordenada a coordenada
- (d) $\{\mathcal{P}(X), \Delta, \cap\}$ con X conjunto
- (e) $\mathbb{Z}[G] = \{\sum_{g \in G} a_g \cdot g \mid a_g \in \mathbb{Z}\}$ con $\sum a_g \cdot g + \sum b_g \cdot g = \sum (a_g + b_g) \cdot g$; $\sum a_g \cdot g \cdot \sum a_h \cdot h = \sum a_g b_h g h$
- (f) $\mathbb{Z}[\sqrt{d}] = \{a + b\sqrt{d} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ con $d \in \mathbb{Z}$, d libre de cuadrados.

Decidir cuáles son conmutativos, cuáles son dominios íntegros, anillos íntegros, anillos de división, cuerpos.

2. Dar ejemplos de

- (a) anillo sin identidad.
- (b) anillo de división que no sea cuerpo.
- (c) anillo que no sea íntegro.
- (d) anillo íntegro que no sea de división.
- (e) dominio íntegro que no sea dominio principal.

3. Sea \mathbb{Z}_n con la suma usual. ¿ Existe algún producto \cdot que haga de $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$ un cuerpo ?

4. Consideramos el anillo $A = \mathcal{C}[0, 1]$ de funciones reales continuas definidas en $[0, 1]$.

- (a) ¿ Hay divisores de cero en A ?
- (b) ¿ Cuáles son los elementos inversibles en A ?

5. Sea A un anillo con identidad 1

- (a) Probar que $\mathcal{U}(A) = \{a \in A \mid a \text{ es inversible}\}$ es un grupo multiplicativo.
- (b) Hallar $\mathcal{U}(\mathbb{Z}_m)$ para $m = 3, 4, 5, 6, 8$.
- (c) ¿Cuál es el orden de $\mathcal{U}(\mathbb{Z}_m)$?
- (d) ¿ Es $\mathcal{U}(\mathbb{Z}_8) \simeq \mathcal{U}(\mathbb{Z}_5)$?

6. Consideremos el anillo $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$

- (a) Probar que en $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ la escritura es única. Es decir que si $a + b\sqrt{3} = c + d\sqrt{3}$, entonces $a = c$ y $b = d$.
- (b) Sea $N : \mathbb{Z}[\sqrt{3}] \rightarrow \mathbb{Z}$ la función (norma) definida por $N(a + b\sqrt{3}) = a^2 - 3b^2$. Probar que es multiplicativa.
- (c) Probar que $2 + \sqrt{3}$ es una unidad.
- (d) Probar que $z \in \mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ es una unidad si y sólo si $N(z) = 1$ ó $N(z) = -1$.
- (e) Hallar otras unidades de $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$.

7. Caracterizar el grupo de unidades de:
 \mathbb{Z} , \mathbb{K} cuerpo, $\mathbb{Z}[i]$, $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$, $B[X]$ con B dominio íntegro.
8. Sea D un dominio de integridad finito. Probar que D es un cuerpo.
9. Hallar todos los ideales primos de \mathbb{Z} .
10. Probar que si \mathbb{K} es un cuerpo entonces $\mathbb{K}[X]$ es un dominio principal. ¿Es $\mathbb{Z}[X]$ un dominio principal?
11. Sea $f : A \rightarrow B$ un morfismo de anillos. Probar que
 - (a) $\text{im}(f)$ es un subanillo de B
 - (b) $\text{ker}(f)$ es un ideal de A
 - (c) $A / \text{ker}(f) \simeq \text{im}(f)$ (como anillos)
12. Sea A un anillo. Probar que A es un anillo de división si y sólo si los únicos ideales a izquierda de A son 0 y A .
13. Sea A un anillo conmutativo y sea \mathcal{I} un ideal de A . Probar que \mathcal{I} es un ideal primo de A si y sólo si A / \mathcal{I} es un dominio íntegro.
14. Probar que en un anillo conmutativo todo ideal maximal es primo.
15. Sea A un anillo conmutativo y sea \mathcal{M} un ideal de A . Probar que \mathcal{M} es maximal si y sólo si A / \mathcal{M} es un cuerpo.
16. Sea \mathbb{K} un cuerpo y sea $f \in \mathbb{K}[X]$. Probar que $\mathbb{K}[X] / \langle f \rangle$ es un cuerpo si y sólo si f es irreducible en $\mathbb{K}[X]$. ¿Sigue valiendo esto si se reemplaza el cuerpo \mathbb{K} por un anillo conmutativo A ?
17. Probar que $\mathbb{Z}[X] / \langle X^2 + 1 \rangle \simeq \mathbb{Z}[i]$
18. Sea \mathbb{K} un cuerpo. Probar que los únicos ideales biláteros de $M_2(K)$ son 0 y $M_2(\mathbb{K})$. ¿Es $M_2(\mathbb{K})$ un anillo de división?
19. Probar que para todo anillo A existe un subanillo B de A tal que $B \simeq \mathbb{Z} / n\mathbb{Z}$ para algún $n \in \mathbb{N}_0$.
20. Probar que $\mathbb{Z}[i] / \langle 1 + i \rangle \simeq \mathbb{Z}_2$ y caracterizar el anillo cociente $\mathbb{Z}[i] / \langle 1 + 2i \rangle$.
21. Probar que si \mathcal{I} es un ideal primo de $\mathbb{Z}[X]$ entonces $\mathcal{I} \cap \mathbb{Z}$ es un ideal primo de \mathbb{Z} .
22. Sea $p \in \mathbb{Z}$ un primo. Probar que $\mathbb{Z}[X] / \langle p \rangle \simeq \mathbb{Z}_p[X]$.
23. Sea A un anillo y sea \mathcal{I} un ideal de A . Probar que hay una correspondencia biyectiva entre los ideales de A / \mathcal{I} y los ideales de A que contienen a \mathcal{I} .
24. Sea $p \in \mathbb{Z}$ un primo. Probar que $\langle p \rangle$ es un ideal primo en $\mathbb{Z}[i]$ sii -1 no es un cuadrado en \mathbb{Z}_p .
25. Probar que todo morfismo de anillos que sale de un cuerpo es inyectivo.
26. Hallar las unidades de $\mathbb{Z}[X] / \langle X^3 \rangle$.
27. Probar que si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es un morfismo de cuerpos entonces $f = id$.
28. Hallar todos los morfismos de cuerpos $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ que satisfacen $f(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}$.