

## Algebra II - Práctica 5.

Segundo cuatrimestre de 2003.

1. Probar que los siguientes conjuntos, con las operaciones definidas tienen estructura de anillo:

- (a)  $(A^{n \times n}, +, \cdot)$  (matrices de  $n \times n$ ,  $A$  anillo conmutativo).
- (b)  $\{f : A \rightarrow A\}$ ,  $A$  anillo;  $(f + g)(a) = f(a) + g(a)$ ;  $(f \cdot g)(a) = f(a) \cdot g(a)$
- (c)  $A_1 \times \dots \times A_n$ ;  $A_1, \dots, A_n$  anillos, suma y producto coordenada a coordenada
- (d)  $\{\mathcal{P}(X), \Delta, \cap\}$  con  $X$  conjunto
- (e)  $\mathbb{Z}[G] = \{\sum_{g \in G} a_g \cdot g \mid a_g \in \mathbb{Z}\}$  con  $\sum a_g \cdot g + \sum b_g \cdot g = \sum (a_g + b_g) \cdot g$ ;  $\sum a_g \cdot g \cdot \sum a_h \cdot h = \sum a_g b_h g h$
- (f)  $\mathbb{Z}[\sqrt{d}] = \{a + b\sqrt{d} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$  con  $d \in \mathbb{Z}$ ,  $d$  libre de cuadrados.

Decidir cuáles son conmutativos, cuáles son dominios íntegros, anillos íntegros, anillos de división, cuerpos.

2. Dar ejemplos de

- (a) anillo sin identidad.
- (b) anillo de división que no sea cuerpo.
- (c) anillo que no sea íntegro.
- (d) anillo íntegro que no sea de división.
- (e) dominio íntegro que no sea dominio principal.

3. Sea  $\mathbb{Z}_n$  con la suma usual. ¿ Existe algún producto  $\cdot$  que haga de  $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$  un cuerpo ?

4. Consideramos el anillo  $A = \mathcal{C}[0, 1]$  de funciones reales continuas definidas en  $[0, 1]$ .

- (a) ¿ Hay divisores de cero en  $A$  ?
- (b) ¿ Cuáles son los elementos inversibles en  $A$  ?

5. Sea  $A$  un anillo con identidad 1

- (a) Probar que  $\mathcal{U}(A) = \{a \in A \mid a \text{ es inversible}\}$  es un grupo multiplicativo.
- (b) Hallar  $\mathcal{U}(\mathbb{Z}_m)$  para  $m = 3, 4, 5, 6, 8$ .
- (c) ¿Cuál es el orden de  $\mathcal{U}(\mathbb{Z}_m)$ ?
- (d) ¿ Es  $\mathcal{U}(\mathbb{Z}_8) \simeq \mathcal{U}(\mathbb{Z}_5)$  ?

6. Consideremos el anillo  $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$

- (a) Probar que en  $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$  la escritura es única. Es decir que si  $a + b\sqrt{3} = c + d\sqrt{3}$ , entonces  $a = c$  y  $b = d$ .
- (b) Sea  $N : \mathbb{Z}[\sqrt{3}] \rightarrow \mathbb{Z}$  la función (norma) definida por  $N(a + b\sqrt{3}) = a^2 - 3b^2$ . Probar que es multiplicativa.
- (c) Probar que  $2 + \sqrt{3}$  es una unidad.
- (d) Probar que  $z \in \mathbb{Z}[\sqrt{3}]$  es una unidad si y sólo si  $N(z) = 1$  ó  $N(z) = -1$ .
- (e) Hallar otras unidades de  $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ .

7. Caracterizar el grupo de unidades de:  
 $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{K}$  cuerpo,  $\mathbb{Z}[i]$ ,  $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ ,  $B[X]$  con  $B$  dominio íntegro.
8. Sea  $D$  un dominio de integridad finito. Probar que  $D$  es un cuerpo.
9. Hallar todos los ideales primos de  $\mathbb{Z}$ .
10. Probar que si  $\mathbb{K}$  es un cuerpo entonces  $\mathbb{K}[X]$  es un dominio principal. ¿Es  $\mathbb{Z}[X]$  un dominio principal?
11. Sea  $f : A \rightarrow B$  un morfismo de anillos. Probar que
  - (a)  $\text{im}(f)$  es un subanillo de  $B$
  - (b)  $\text{ker}(f)$  es un ideal de  $A$
  - (c)  $A / \text{ker}(f) \simeq \text{im}(f)$  (como anillos)
12. Sea  $A$  un anillo. Probar que  $A$  es un anillo de división si y sólo si los únicos ideales a izquierda de  $A$  son  $0$  y  $A$ .
13. Sea  $A$  un anillo conmutativo y sea  $\mathcal{I}$  un ideal de  $A$ . Probar que  $\mathcal{I}$  es un ideal primo de  $A$  si y sólo si  $A / \mathcal{I}$  es un dominio íntegro.
14. Probar que en un anillo conmutativo todo ideal maximal es primo.
15. Sea  $A$  un anillo conmutativo y sea  $\mathcal{M}$  un ideal de  $A$ . Probar que  $\mathcal{M}$  es maximal si y sólo si  $A / \mathcal{M}$  es un cuerpo.
16. Sea  $\mathbb{K}$  un cuerpo y sea  $f \in \mathbb{K}[X]$ . Probar que  $\mathbb{K}[X] / \langle f \rangle$  es un cuerpo si y sólo si  $f$  es irreducible en  $\mathbb{K}[X]$ . ¿Sigue valiendo esto si se reemplaza el cuerpo  $\mathbb{K}$  por un anillo conmutativo  $A$ ?
17. Probar que  $\mathbb{Z}[X] / \langle X^2 + 1 \rangle \simeq \mathbb{Z}[i]$
18. Sea  $\mathbb{K}$  un cuerpo. Probar que los únicos ideales biláteros de  $M_2(K)$  son  $0$  y  $M_2(\mathbb{K})$ . ¿Es  $M_2(\mathbb{K})$  un anillo de división?
19. Probar que para todo anillo  $A$  existe un subanillo  $B$  de  $A$  tal que  $B \simeq \mathbb{Z} / n\mathbb{Z}$  para algún  $n \in \mathbb{N}_0$ .
20. Probar que  $\mathbb{Z}[i] / \langle 1 + i \rangle \simeq \mathbb{Z}_2$  y caracterizar el anillo cociente  $\mathbb{Z}[i] / \langle 1 + 2i \rangle$ .
21. Probar que si  $\mathcal{I}$  es un ideal primo de  $\mathbb{Z}[X]$  entonces  $\mathcal{I} \cap \mathbb{Z}$  es un ideal primo de  $\mathbb{Z}$ .
22. Sea  $p \in \mathbb{Z}$  un primo. Probar que  $\mathbb{Z}[X] / \langle p \rangle \simeq \mathbb{Z}_p[X]$ .
23. Sea  $A$  un anillo y sea  $\mathcal{I}$  un ideal de  $A$ . Probar que hay una correspondencia biyectiva entre los ideales de  $A / \mathcal{I}$  y los ideales de  $A$  que contienen a  $\mathcal{I}$ .
24. Sea  $p \in \mathbb{Z}$  un primo. Probar que  $\langle p \rangle$  es un ideal primo en  $\mathbb{Z}[i]$  sii  $-1$  no es un cuadrado en  $\mathbb{Z}_p$ .
25. Probar que todo morfismo de anillos que sale de un cuerpo es inyectivo.
26. Hallar las unidades de  $\mathbb{Z}[X] / \langle X^3 \rangle$ .
27. Probar que si  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es un morfismo de cuerpos entonces  $f = id$ .
28. Hallar todos los morfismos de cuerpos  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  que satisfacen  $f(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}$ .