

## Algebra II - Práctica 6.

Segundo cuatrimestre de 2003.

1. Sean  $A$  y  $B$  anillos conmutativos,  $\mathcal{P}$  un ideal primo de  $B$  y  $f : A \rightarrow B$  un morfismo de anillos. Probar que  $f^{-1}(\mathcal{P})$  es un ideal primo.
2. Caracterizar los anillos cocientes

$$\mathbb{Z}[X]/\langle 2, X \rangle \quad \mathbb{Z}[X]/\langle 2 \rangle \quad \mathbb{Z}[X]/\langle 2X \rangle \quad \mathbb{Z}[X]/\langle X^2 \rangle$$

$$\mathbb{Z}[X]/\langle X^2 + 1 \rangle \quad \mathbb{Z}[X]/\langle X^2 + X + 1 \rangle \quad \mathbb{Z}[i]/\langle 2 \rangle \quad \mathbb{Z}[i]/\langle 2, 1 + i \rangle$$

3. Sea  $A$  un anillo conmutativo con unidad y sea  $A'$  subanillo con  $1 \in A'$ . Probar o dar contraejemplo:
  - (a)  $A$  cuerpo  $\Rightarrow A'$  cuerpo
  - (b)  $A$  dominio íntegro  $\Rightarrow A'$  dominio íntegro
  - (c)  $A'$  dominio íntegro  $\Rightarrow A$  dominio íntegro

4. ¿ El  $\det : M_n(A) \rightarrow A$  es un morfismo de anillos ? Y ¿ la traza?

5. Mostrar isomorfismos de

(a)  $\mathbb{Q}[X]/\langle X^3 + X \rangle \simeq \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}(i)$

(b)  $\mathbb{R}[X]/\langle X^4 - 1 \rangle \simeq \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{C}$

6.  $A$  anillo conmutativo,  $f \neq 0$  en  $A[X]$ .

$f$  es divisor de cero en  $A[X] \Leftrightarrow$  existe  $r \in A$  tal que  $r \neq 0, rf = 0$ .

7.  $A$  dominio íntegro,  $a \in A$ . Probar:

(a)  $a$  primo  $\Rightarrow a$  irreducible

(b)  $A$  DFU,  $a$  irreducible  $\Rightarrow a$  primo

(c) En  $A = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ :  $3, 7, 4 + \sqrt{-5}, 1 + 2\sqrt{-5}, 1 - 2\sqrt{-5}$  son irreducibles y no primos. ¿ Es  $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$  DFU ? ¿ Es DF?

8.  $A \subseteq B \subseteq C$  dominios íntegros. Buscar algún ejemplo de  $A$  y  $C$  DFU,  $B$  no.

9.  $A$  dominio íntegro,  $I$  ideal propio de  $A$ ;  $\pi : A \rightarrow A/I$  la proyección canónica. Sean

$$f = \sum_{i=0}^n a_i X^i \in A[X] \text{ mónico y } \bar{f} = \sum_{i=0}^n \pi(a_i) X^i \in A/I[X]. \text{ Probar que:}$$

$$f \text{ es reducible en } A[X] \Rightarrow \bar{f} \text{ es reducible en } (A/I)[X]$$

10. Sea  $A$  DFU y  $\mathbb{K}$  su cuerpo de cocientes.

(a) Probar que si  $f, g \in A[X]$  son polinomios primitivos,  $fg$  es primitivo.

(b) Probar que si  $f \in A[X]$  es irreducible, entonces visto como polinomio con coeficientes en  $\mathbb{K}$  también es irreducible.

(c) Probar que si  $f \in A[X]$  es primitivo y  $f$  es irreducible en  $\mathbb{K}[X]$  entonces  $f$  es irreducible en  $A[X]$ .

(d) Probar que  $A[X]$  es DFU.

11. **Criterio de irreducibilidad de Eisenstein:** Sea  $A$  un DFU y  $\mathbb{K}$  su cuerpo de cocientes.

Sea  $f = \sum_{i=0}^n a_i X^i \in A[X]$ . Supongamos que exista un primo  $p \in A$  tal que:

- (a)  $p$  no divide a  $a_n$
- (b)  $p$  divide a  $a_i$ ,  $0 \leq i \leq n-1$
- (c)  $p^2$  no divide a  $a_0$

Probar que  $f$  es irreducible en  $\mathbb{K}[X]$

12. **Lema de Gauss:** Sea  $A$  un DFU y  $\mathbb{K}$  su cuerpo de cocientes. Sea  $f = \sum_{i=0}^n a_i X^i \in A[X]$

con  $a_0 \neq 0$ . Si  $p$  y  $q$  son elementos de  $A$  no nulos, coprimos entre sí tales que  $\frac{p}{q} \in \mathbb{K}$  es raíz de  $f$ , demostrar que  $p/a_0$  y  $q/a_n$  en  $A$ .

13. Probar que todo **ideal primo** de  $\mathbb{Z}[X]$  es alguno de los siguientes:

- (a)  $\langle p \rangle$  ó  $\langle p, f \rangle$  con  $p \in \mathbb{Z}$  primo,  $f \in \mathbb{Z}[X]$  tal que  $\bar{f} \in \mathbb{Z}_p[X]$  es irreducible en  $\mathbb{Z}_p[X]$
- (b)  $\langle f \rangle$  donde  $f$  es primitivo e irreducible en  $\mathbb{Q}[X]$

14. Sean  $\mathbb{K}$  un cuerpo y  $f, g \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ . Probar que:

- (a)  $f + g = 0$  ó  $\text{gr}(f + g) \leq \max\{\text{gr} f, \text{gr} g\}$
- (b)  $fg = 0 \Rightarrow f = 0$  ó  $g = 0$ . (Es decir,  $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$  es un dominio íntegro)
- (c)  $\text{gr}(fg) = \text{gr} f + \text{gr} g$ . (Sug: descomponer a  $f$  y  $g$  en suma de polinomios homogéneos.)
- (d) Cuáles son los elementos inversibles de  $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ ?
- (e) Probar que  $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$  tiene una estructura de  $\mathbb{K}$ -espacio vectorial y exhibir una base.
- (f) Un polinomio de grado  $d$  en una variable tiene, a lo sumo,  $d + 1$  coeficientes no nulos o monomios. Cuántos coeficientes no nulos puede tener un polinomio de grado  $d$  en 2 variables?
- (g) Cuántos coeficientes no nulos puede tener un polinomio homogéneo de grado  $d$  en  $n$  variables?
- (h) Cuántos coeficientes no nulos puede tener un polinomio cualquiera de grado  $d$  en  $n$  variables?
- (i) Cuál es la dimensión del  $\mathbb{K}$ -espacio vectorial  $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]_{\leq d} = \{f \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n] : f = 0 \text{ ó } \text{gr} f \leq d\}$ .

15. Caracterizar los anillos cocientes:

$$\mathbb{R}[X, Y, Z]/\langle X, Y \rangle \quad \mathbb{R}[X, Y, Z]/\langle X - Y^5 \rangle \quad \mathbb{R}[X, Y, Z]/\langle Y - Z^3, Z - X^3 \rangle$$

16. Mostrar que  $X^2 + Y^2 - 1$  y  $XT - YZ$  son irreducibles en  $\mathbb{Q}[X, Y]$  y  $\mathbb{Q}[X, Y, Z, T]$  respectivamente.

17. Sea  $I = \langle Y + X^2 - 1, XY - 2Y^2 + 2Y \rangle \subset \mathbb{R}[X, Y]$ . Decidir si  $\mathbb{R}[X, Y]/I$  es un cuerpo.