Algebra II - Práctica 1

1er. Cuatrimestre 2004

Grupos, subgrupos y morfismos

(1) Si p es un número primo, verificar que el conjunto de elementos no nulos de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ con la operacion $\bar{a} * \bar{b} = \overline{ab}$ es un grupo de orden $p-1$. ¿Que pasa si p no es primo?

(2) Sea $n \in N$ y sea $G_n := \{z \in \mathbb{C} |\, z^n = 1\}$. Probar que $(G_n, \cdot)$ es un grupo abeliano cíclico, i.e. existe un generador $w \in G_n$ tal que $\forall z \in G_n\, \exists k \in \mathbb{Z}$ con $z = w^k$.

(3) Sea $S^1 = \{z \in \mathbb{C}$ tal que $|z| = 1\}$. Probar que $(S^1, \cdot)$ es un grupo abeliano. ¿Es cíclico?

(4) Probar que si G es un grupo tal que todo $a \in G$ satisface $a^2 = 1$, entonces G es abeliano.

(5) Sea $(G, \cdot)$ un grupo y S un subconjunto no vacío de G. Probar que:
  (a) S es un subgrupo de G si y sólo si $xy^{-1} \in S$ para todo x, y en S.
  (b) si G es finito entonces S es un subgrupo de G si y sólo si $xy \in S$ para todo x, y en S.

(6) Probar que si H es un subgrupo de $\mathbb{Z}$ entonces existe $n \in \mathbb{N}_0$ tal que $H = n\mathbb{Z}$.

(7) Calcular el centro de los siguientes grupos:
  (a) El grupo cuaterniónico $\mathcal{H} := \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ donde la "tabla de multiplicación" de $\mathcal{H}$ está dada por

$$i.j = -j.i = k \ ; \ jk = -kj = i \ ; \ ki = -ik = j$$

$$i.i = j.j = k.k = -1$$

  (verificar primero que $\mathcal{H}$ es un grupo)
  (b) El grupo dihedral $D_n := \{1, s, \rho, s * \rho, \rho^2, \ldots, \rho^{n-1}, s * \rho^n\}$ (donde s y ρ satisfacen $s^2 = 1$, $\rho^n = 1$ y $\rho * s = s * \rho^{-1}$) para $n > 2$. Sug. considere por separado n par o impar .

(8) Hallar ord(x) en los casos:
  (a) $G = S_8$, $x = (12)(567)$; $x = (1234)(5678)$.
  (b) $G = \mathbb{Z}_{12}$, $x = 2; x = 3; x = 4$.
  (c) $G = D_4$, $x = \rho^2 * s; x = \rho^3$.
  (d) G un grupo cualquiera y $x = a^d$, donde $a \in G$ es un elemento de orden n y d es un número natural.

(9) Calcular *todos* los subgrupos de $\mathcal{H}$, ver que a pesar de que $\mathcal{H}$ no es conmutativo, todos sus subgrupos son invariantes. (nombre: un grupo con esa propiedad se llama Hamiltoniano).

(10) Hallar *todos* los subgrupos de orden 4 de D_4. ¿Cuales son normales? ¿Cuales son isomorfos a $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$? ¿ A $\mathbb{Z}_4$?

(11) Sea p un primo, y $Sl_2(\mathbb{Z}_p) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(Z_p) \text{ con } ad - bc = 1 \right\}$
  (a) Probar que $Sl_2(\mathbb{Z}_p)$ es un grupo no abeliano de orden $p^2(p-1)$.
  (b) Caracterizarlo en el caso $p = 2$.

(12) Sea X un conjunto y G un grupo.
  (a) Probar que $G^X = Func(X, G) = \{f : X \to G\}$ es un grupo con la multiplicación dada por $(f.g)(x) := f(x).g(x)$.

(b) Si X y G son finitos, cuál es el orden de G^X en términos del orden de G y el cardinal de X?
(c) Sea $H_{x_0} \subset G^X$ el subconjunto formado por las funciones $f : X \to G$ tales $f(x_0) = e_G$. ¿ Es un subgrupo? ¿ Es normal?
(d) Sea $g \neq e_G$ y $H_{x_0,g} \subset Func(X,G)$ el subconjunto de funciones f que verifican $f(x_0) = g$, es un subgrupo?
(e) Calcular el centro de G^X.

(13) Sean X y G como antes, $x_0 \in X$ y $ev_{x_0} : G^X \to G$ dado por
$$ev_{x_0}(f) := f(x_0)$$
donde $f : X \to G$. Verificar que es un morfismo de grupos. Calcular núcleo e imagen.

(14) Sean K y G dos grupos, y $Hom_{Gr}(K,G)$ el subconjunto de $Func(K,G)$ formado por las funciones que son morfismos. ¿Es un subgrupo de G^K? Responder la pregunta para el caso G conmutativo y para el caso G no conmutativo.

(15) Sea $f : G \to G'$ con G' abeliano. Ver que necesariamente $[G,G] \subseteq Ker(f)$.

(16) Si G es un grupo cualquiera, ver que la función
$$ev_1 : \mathrm{Hom}_{Gr}(\mathbb{Z}, G) \to G$$
$$f \mapsto f(1)$$
es biyectiva.

(17) Sea G un grupo **abeliano** y considerar el grupo $(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z})$ que consiste en $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ como conjunto y con la suma coordenada a coordenada. Ver que la función
$$Hom_{Gr}(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, G) \to G \times G$$
$$f \mapsto (f(1,0), f(0,1))$$
es una biyección. ¿es cierto el enunciado anterior si se cambia G abeliano por G no abeliano? Dar demostración o contraejemplo según el caso.

(18) Ver que $Hom_{Gr}(\mathbb{Q}, \mathbb{Z})$ sólo contiene el morfismo nulo.

(19) Sea la función $f : \mathcal{H} \to \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ definida por
$$f(\pm 1) = (0,0) \; ; f(\pm i) = (1,0) \; ; f(\pm j) = (0,1) \; ; f(\pm k) = (1,1)$$
un morfismo de grupos? En tal caso calcule núcleo e imagen.

(20) ¿Existe un isomorfismo de grupos entre:
(a) $\mathbb{Z}_4 \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$?
(b) $\mathbb{Z}_{2n} \cong D_n$?
(c) $\mathbb{Z}_8 \cong \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_2 \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \cong \mathcal{H} \cong D_4$?
(d) $(\mathbb{R}, +) \cong (\mathbb{R}_{>0}, .)$?
(e) $(\mathbb{R}, +) \cong (\mathbb{R} - \{0\}, .)$?

(21) Sean $m, n \in \mathbb{N}$ coprimos, ver que $\mathrm{Hom}_{Gr}(\mathbb{Z}_m, \mathbb{Z}_n)$ contiene sólo al morfismo nulo.

(22) Sea k un cuerpo, ver que $det : Gl_n(k) \to (k^*, .)$ es un morfismo de grupos, por lo tanto $Sl_n(k) := \{A \in k^{n \times n} \; / \; det(A) = 1\}$ es un subgrupo (invariante) de $Gl_n(k)$. ¿cuánto vale $Gl_n(k)/Sl_n(k)$?

(23) Sea H un subgrupo de $\mathbb{Q}$ finitamente generado. Demostrar que H es cíclico. Concluir que $\mathbb{Q}$ no es finitamente generado.

(24) Ver que $S_3 \cong D_3$.