Algebra II - Localización

1er. Cuatrimestre 2004

(1) Sea $A = (\mathbb{Z}_{15}, +, *)$ y $S = \{1, 3, 6, 9, 12\}$. Verificar que S es un conjunto multiplicativo y caracterizar A_S.

(2) Sea $A = (\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \text{ f es continua}\}, +, *)$ y sea $S = \{f : f(0) \neq 0\}$. Demostrar que $A_S \simeq \{f : U \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}/\sim$ donde U es un abierto de $\mathbb{R}$ que contiene al cero, y dos pares (f, U), (g, V) son equivalentes si existe $W \subset U \cap V$ tal que $f|W = g|W$.

- ¿Quién es $U(A_S)$?
- Sea $m := \{f \in A_S : f(0) = 0\}$. Probar que m es un ideal de A_S y que $A_S/m \simeq \mathbb{R}$ como anillos.

(3) Sea $A = (\mathbb{Z}, +, *)$, p un primo y $\mathfrak{p} = p\mathbb{Z}$. Sea $S = \mathbb{Z} \backslash \mathfrak{p}$ (o sea el conjunto de todos los elementos no divisibles por p). Demostrar que si I es un ideal no nulo de A_S, entonces $I = p^r A_S$ para algun $r \in \mathbb{N}_0$.