Algebra II - Práctica 10

1er. Cuatrimestre 2004

Teorema de estructura sobre d.i.p.'s

(1) Sea R an anillo semisimple. Probar que $\text{rad}(R) = 0$ donde $\text{rad}(R)$ es la intersección de todos los ideales a izquierda maximales de R.

(2) Dado R un anillo, demostrar que $\text{rad}(R)$ es un ideal bilatero.

(3) Sea R un anillo, y $r \in \text{rad}(R)$. Probar que $1 - r$ es una unidad de R. ¿Es cierta la recíproca?

(4) Los anillos $\mathbb{R}[\mathbb{Z}_2]$, $\mathbb{R}[\mathbb{Z}_3]$ y $\mathbb{C}[\mathbb{Z}_3]$ son semisimples por el Teorema de Maschke. Dar la descomposición como producto de matrices sobre álgebras de división (como dice el Teorema de Wedderburn). Sugerencia: encontrar los módulos simples sobre los respectivos anillos. Antes de hacer cuentas, sabiendo que las únicas álgebras de dimensión finita sobre $\mathbb{R}$ son $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ y $\mathbb{H}$, cuales son las posibilidades?

(5) Sea R un anillo semisimple, y M un R-módulo simple. Probar que M es isomorfo a un ideal de R.

(6) Sea R un anillo semisimple y M un R-módulo. A partir del teorema de Wedderburn sabemos que $R \cong \prod_{i=1}^{n} M_{r_i}(D_i)$ donde cada $D_i = \text{End}_R(L_i)^{\text{op}}$ es el anillo de endormorfismos del ideal simple L_i, y r_i es la cantidad de veces que aparece L_i en R como sumando directo. A su vez M se descomopone en suma directa de submódulos simples, cada uno de ellos isomorfo a algún L_i (¿por qué?). Dar una condición necesaria y suficiente sobre la multiplicidad de cada L_i en M para decidir cuando M es libre. Concluir que si R es semisimple, entonces R tiene noción de rango.

(7) (Una versión del Lemma de Schur) Sea k un cuerpo algebraicamente cerrado, G un grupo finito tal que $|G|$ es inversible en k. Sea M un $k[G]$-módulo simple no nulo. Provar que $\text{End}_{k[G]}(M) \cong k$, es decir, los únicos morfismos G-lineales son las homotecias. (Sugerencia: pensar en autovalores).

(8) (Teorema chino del resto). Sea R un anillo conmutativo, $r_1, ..., r_n$ elementos de A. Llamemos $b_i = r_1.r_2...\hat{r_i}...r_n$ y supongamos que $\sum_{i=1}^{n} t_i.b_i = 1$ para ciertos elementos t_i. Sea $I = r_1.r_2...r_n.R$, $I_i = r_i.R$ R-ideales. Como $I \subseteq I_i$, R/I_i es un R/I-módulo para todo $i = 1, ..., n$. Probar que $R/I \cong \oplus R/I_i$.

(9) Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo k, $dim_k(V) < \infty$ y $\phi : V \to V$ una transformación lineal. Luego (V, ϕ) admite una estructura de $k[x]$-módulo dada por $x.v = \phi(v)$. Probar que:
- Existe una base en la que la matriz de ϕ se parte en dos bloques $\Leftrightarrow$ (V, ϕ) se descompone en suma directa de dos $k[x]$-submódulos.
- No existe ninguna base en la que ϕ se escriba en bloques $\Leftrightarrow$ (V, ϕ) es un $k[x]$-módulo indescomponible, luego cíclico (¿por qué?)

(10) Sea (V, ϕ) un $k[x]$-módulo indescomponible, luego $(V, \phi) \cong k[x]/ < p >$. Si escribimos a $p = q_1^{\alpha_1}...q_s^{\alpha_s}$ con los q_i irreducibles y sin repeticiones, considerar $a_i = q_i^{\alpha_i}$. Ver que se está en las condiciones del teorema chino del resto (sug.: usar argumentos de divisibilidad)

Concluir (a partir del teorema chino del resto) que existe una base de V en la que ϕ se escribe en n bloques, cada uno de ellos correspondiene a un $k[x]$ submódulo isomorfo a $k[x]/ < a_i >$.

(11) (Formas de Jordan) Sea k un cuerpo algebraicamente cerrado y sea (V, ϕ) un $k[x]$-módulo. A partir del ejercicio anterior, y sabiendo que los polinomios

irreducibles son todos de la forma $(x-\lambda)$, demuestre que existe una base en la que ϕ se escribe en bloques de Jordan, es decir, en bloques de la forma

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \dots & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

Sug.: en $k[x]/<(x-\lambda)^n>$ calcular la matriz del endomorfismo "multiplicar por x" en la base $\{\overline{1}, \overline{(x-\lambda)}, \overline{(x-\lambda)^2}, ..., \overline{(x-\lambda)^{n-1}}\}$.

(12) Sea R un d.i.p., M un módulo de tipo finito y T un submódulo tal que M/T es sin torsión. Entonces M es libre si y sólo si T es libre.

(13) Clasificar los grupos abelianos de orden 16, 18, 20, 189.

(14) Caracterizar a todos los grupos abelianos G tales que:
- todo elemento no nulo tiene orden primo.
- todo subgrupo propio es de orden primo.
- $|G|=36$, G no tiene elementos de orden 4 y G tiene dos elementos de orden 3.

(15) Sea k un cuerpo finito, ver que el subgrupo aditivo generado por el 1 es un subcuerpo necesariamente isomorfo a $\mathbb{Z}_p$ para algún número primo p (luego $|k|=p^n$ para algún n, ¿por qué?). Considerar el grupo abeliano $G=(k-\{0\},.)$, o sea, el grupo multiplicativo de unidades de k. Probar que G es cíclico (sug. usando el teorema de estructura escribir las posibles estructuras de G. Luego, a través de la traducción de la notación aditiva a la multiplicativa, relacione la cantidad de ceros que pueden tener en k los polinomios, y los órdenes de los elementos de G).