Algebra II - Práctica 2

1er. Cuatrimestre 2004

Subgrupos normales, morfismos y ecuación de clases

(1) Calcular el centralizador de $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ en $Sl_2(\mathbb{Z}_3)$ y en $Gl_2(\mathbb{Z}_3)$.

(2) Si G es un grupo, y H es un subgrupo, H define una relacion de equivalencia a derecha (resp. a izquierda) en los elementos de G via $g \sim_r g' \Leftrightarrow g = g'h$ para algún $h \in H$ (resp. $g \sim_l g' \Leftrightarrow g = hg'$). Notamos gH al conjunto de elementos de G equivalentes a derecha a g (resp. Hg), y G/H al conjunto de clases de equivalencia (resp. $H\backslash G$).
  (a) Demostrar que la función $\phi : G \to G$, donde $\phi(g) = g^{-1}$ define una biyeccion entre G/H y $H\backslash G$.
  (b) $H \triangleleft G$ si y sólo si $gH = Hg$ para todo $g \in G$.
  (c) Si $H \triangleleft G$ la estructura de grupo de G/H y $H\backslash G$ es la misma.

(3) Si G es un grupo, y H es un subgrupo de índice 2 en G, entonces $H \triangleleft G$.

(4) Si G es un grupo tal que todos los elementos de G tienen orden 2, entonces G es abeliano.

(5) Demostrar que si G es un grupo de orden 4, entonces G es isomorfo a $\mathbb{Z}_4$ o $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$.

(6) Sea $\mathcal{H}_{24} : \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k, \pm\frac{1}{2} \pm \frac{i}{2} \pm \frac{j}{2} \pm \frac{k}{2}\}$ donde el producto es el mismo que en $\mathcal{H}$ (ver ejercicio 7 (a) práctica 1).
  (a) Demostrar que $\mathcal{H}_{24}$ es un grupo.
  (b) Sea $S = \{\pm 1, \pm i\}$. Demostrar que $S \triangleleft \mathcal{H} \triangleleft \mathcal{H}_{24}$. ¿ Es $S \triangleleft \mathcal{H}_{24}$?

(7) Sea G un grupo y H, K subgrupos.
  - ¿ Es HK un subgrupo de G? (demostración o contraejemplo).
  - Demostrar que si H, K son subgrupos normales de G entonces $HK = KH$. Además HK es un subgrupo normal de G.

(8) Sea G un grupo. Probar que $G/[G, G]$ es abeliano.

(9) Probar que:
  (a) $\mathbb{C}^\times/\mathbb{R}_{>0} \simeq S^1$
  (b) $\mathbb{Z}/mZ \simeq \mathbb{Z}_m$
  (c) $Gl_n(\mathbb{R})/Sl_n(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^\times$
  (d) $\mathbb{Q}^\times/\mathbb{Q}_{>0} \simeq \mathbb{Z}_2$
  (e) $S^1/G_n \simeq S^1$
  (f) Si $n \mid m$ entonces $G_n/G_m \simeq G_{\frac{n}{m}}$

(10) Sea $f : G \to G'$ un isomorfismo de grupos, y sea $H \triangleleft G$. Si $H' = f(H)$, probar que:
  - $H' \triangleleft G'$.
  - $G/H \simeq G'/H'$.

(11) Si G es un grupo no abeliano de orden 8, entonces G es isomorfo a D_4 o $\mathcal{H}$.

(12) Sea G un grupo, ver que la aplicación $G \to Aut_{Gr}(G)$, $g \mapsto g.-.g^{-1}$ ($x \mapsto g.x.g^{-1}$) es un morfismo de grupos. Calcular el núcleo de ese morfismo. Si H es un subgrupo de G, la misma aplicación define un morfismo de grupos $G \to Aut_{Gr}(H)$ si y sólo si H es un subgrupo invariante.

(13) Sea $G = \mathbb{Z}_4$ actuando en $\mathbb{R}^4$ por la fórmula

$$\bar{1}.(x, y, z, t) = (t, x, y, z)$$

descomponer a $\mathbb{R}^4$ en suma directa de subespacios $\mathbb{Z}_4$-estables lo "más chicos posible". (sugerencia: dado un subespacio estable buscar complementos con los ortogonales).

(14) Sea $\mathcal{H}$ el grupo de Hamilton actuando sobre sí mismo por conjugación. Para cada elemento de $\mathcal{H}$ describir las órbitas. Separar las órbitas puntuales para así encontrar de nuevo el centro. Encontrar los "a_i" del teorema de la ecuación de clases y sus respectivos subgrupos $Z(a_i)$.

(15) Sea G un grupo finito, $|G| = p^n$ para algún número primo p, entonces el centro de G es no trivial, i.e. $|Z(G)| > 1$.

(16) Probar que si $G/Z(G)$ es cíclico entonces G es abeliano.

(17) Sea G un grupo de orden p^2, entonces G es abeliano.

(18) Sea G un grupo no abeliano de orden p^3, entonces $Z(G) = [G, G]$ y $|Z(G)| = p$.

(19) Ver que el grupo de matrices de la forma $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ con } a, b, c \in \mathbb{Z}_p \right\}$ es un ejemplo de grupo no abeliano de orden p^3. Describir en este caso $[G, G]$.

1. Producto Semidirecto

(1) Sean H y K dos grupos y $\phi : K \to Aut_{Gr}(H)$ un morfismo de grupos, es decir, K actúa (multiplicativamente) sobre H (por ejemplo si H y K son dos subgrupos de un grupo G, $H \triangleleft G$ y $K \to Aut_{Gr}(H)$, $k \mapsto k.-.k^{-1}$). Se define sobre el conjunto $H \times K$ la operación: $(h, k).(h'.k') := (h.(\phi(k))(h'), k.k')$ (en el ejemplo entre paréntesis sería $(h, k).(h'.k') = (h.(k.(h').k^{-1}), k.k'))$.

(a) Probar que con esa operación, $H \times K$ tiene una estructura de grupo, que llamaremos $H \rtimes K$ (o $H \rtimes_\phi K$).

(b) Encontrar el inverso de $(h, 1_K)$, el inverso de $(1_H, k)$, y el inverso de un (h, k) cualquiera.

(c) Probar que el conjunto $H \times \{1_K\}$ es un subgrupo (isomorfo a H) invariante en $H \rtimes K$, más aún $(1_H, k)(h, 1_K)(1_H, k)^{-1} = ((\phi(k))(h), 1_K)$ (notar que esta igualdad es obvia para el ejemplo entre paréntesis).

(d) Ver que la función $\pi : H \rtimes K \to K$ definida por $\pi(h, k) = k$ es un morfismo de grupos. Verificar que $Ker(\pi) = H \times \{1_K\}$ (otra manera de ver que es invariante).

(e) ¿Es siempre $\{1_H\} \times K$ invariante en $H \rtimes K$?

(f) Sea G grupo y $\pi : G \to K$ un morfismo sobreyectivo (por lo tanto $K \simeq G/Ker(\pi)$) y sea $H = Ker(\pi)$. Demostrar que si existe un morfismo de grupos $j : K \to G$ tal que $\pi(j(k)) = k$ $\forall k \in K$ entonces $G \simeq H \rtimes K$.

(g) $\{1_H\} \times K$ es invariante en $H \rtimes K$ si y sólo si los elementos de $H \times \{1_K\}$ conmutan con los elementos de $\{1_H\} \times K$ (en cuyo caso $G \simeq H \times K$).

(h) Ver que $(-)^n : S^1 \to S^1$ $(z \to z^n)$ es un epimorfismo con núcleo G_n, pero S^1 no es isomorfo a $G_n \rtimes S^1$.

(2) Ver que $S_3 \simeq D_3 \simeq \mathbb{Z}_3 \rtimes \mathbb{Z}_2$.

(3) Considerar un grupo G, H un subgrupo que soponemos normal en G y G/H.

(a) Supongamos que existe un morfismo de grupos $s : G/H \to G$ tal que $\pi_H \circ s = id_{G/H}$ (i.e. $\overline{s(\overline{g})} = \overline{g}\ \forall g \in G$). Entonces $G \simeq H \rtimes G/H$.

(b) Supongamos que existe un morfismo $r : G \to H$ tal que $r|_H = id_H$, entonces $G \simeq H \times G/H$. (sug.: demuestre también que en este caso $G/H \simeq Ker(r)$).

(4) Sea G un grupo y $H \triangleleft G$. ¿ Es cierto que o bien $G \simeq H \times G/H$ o bien $G = H \rtimes G/H$? Dar demostración o contraejemplo.

(5) Demostrar que $S_n/A_n \simeq \mathbb{Z}_2$, más aún, $S_n \simeq A_n \rtimes \mathbb{Z}_2$.

(6) Sea G el grupo de transformaciones afines de $\mathbb{R}$, es decir, el grupo de funciones de la forma $x \mapsto a.x+b$ con $a \neq 0$. Ver que es efectivamente un grupo (encontrar inversos), y que es isomorfo al subgrupo de matrices inversibles formado por las matrices de la forma $G \simeq \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ con } a, b \in \mathbb{R},\ a \neq 0 \right\}$.

Ver que $G \simeq (\mathbb{R}, +) \rtimes (\mathbb{R} - \{0\}, .)$.

Si se considera el grupo de transformaciones afines en $\mathbb{R}^n$, es decir, las transformaciones del tipo $x \mapsto A.x^t + v$ con $A \in Gl_n(\mathbb{R})$ y $v \in \mathbb{R}^n$, ver que este grupo es isomorfo a $(\mathbb{R}^n, +) \rtimes Gl_n(\mathbb{R})$.

(7) Sea G un grupo de orden $2p$ (p primo). Entonces G es abeliano o G es isomorpho a D_p.