Algebra II - Práctica 3

1er. Cuatrimestre 2004

Teoremas de Sylow y grupos resolubles

1. Teoremas de Sylow

(1) Deteminar todos los subgrupos de Sylow de A_5 y D_n para todo $n \geq 2$.
(2) Sea G un grupo simple de orden 168, calcular la cantidad de elementos de orden 7 que hay en G.
(3) Sea G un grupo no abeliano de orden 39. ¿ Cuántos elementos de orden 3 y de orden 13 hay en G? ¿Y si G es abeliano?
(4) Sea G un grupo no abeliano de orden 21. Para todo primo p calcular cuantos p-subgrupos de Sylow tiene G.
(5) Probar que:
  (a) Todo grupo de orden $17^2 19^2$ es abeliano.
  (b) Todo grupo de orden 255 es cíclico.
  (c) Todo grupo de orden 5.7.17 es cíclico.
(6) Sea G un grupo, y H un subgrupo de índice n. Probar que existe un subgrupo $N < H$ tal que $N \triangleleft G$ y $[G : N] \mid n!$. (Hint. Considerar la accion de G en el conjunto $X = G/H$, y tomar N el núcleo de la acción).
(7) Probar que no existen grupos simples de orden:
  (a) p^n con $n \geq 2$.
  (b) $p.q$ con p y q primos distintos.
  (c) $p^2.q$ con p y q primos distintos.
  (d) $p^2.q^j$ con p y q primos distintos tales que $p < q$ y $j \geq 2$.

2. Grupos Resolubles

(1) Sea G un grupo y $H \triangleleft G$. Probar que G es resoluble si y solo si H y G/H lo son.
(2) Probar que todo p-grupo es resoluble.
(3) Sean p y q primos distintos. Probar que:
  (a) Todo grupo de orden $p.q$ es resoluble.
  (b) Todo grupo de orden $p^2.q$ es resoluble.
  (c) Si p y q son primos impares, todo grupo de orden $2pq$ es resoluble.
(4) Dado G un grupo finito se define la sucesión de subgrupos $\{G^{(n)}\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ de la siguiente manera:
$$\begin{cases} G^{(0)} & = G \\ G^{(n+1)} & = [G^{(n)}, G^{(n)}] \text{ si } n \geq 1 \end{cases}$$
Probar que G es resoluble si y solo si existe k tal que $G^k = \{1\}$.

Problema para el estudiante que adora hacer cuentas: probar que todo grupo de orden menor que 60 es resoluble.