Algebra II - Práctica 4

1er. Cuatrimestre 2004

Anillos

(1) Sea $(A, +, .)$ un anillo, y $M_n(A)$ el conjunto de matrices de $n \times n$ con coeficientes en A. Ver que $M_n(A)$ con la suma coordenada a coordenada y el producto usual de matrices es un anillo. Ver que si $n > 1$, $M_n(A)$ nunca es conmutativo.

(2) Sean $A_1, \ldots, A_n$ anillos, y $B = A_1 \times \ldots \times A_n$. Probar que B con la suma y producto coordenada a coordenada es un anillo. ¿ Es íntegro?

(3) Sea A un anillo y $A[[x]]$ (llamado series formales con coeficientes en A e indeterminada x) el siguiente conjunto:

$$A[[x]] = A^{\mathbb{N}_0} = \{ \text{ funciones de } \mathbb{N}_0 \text{ en } A\}$$

donde se adopta por notación $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ = la función que a cada $n \in \mathbb{N}_0$ le asigna $a_n \in A$. Se define en $A[[x]]$ la operación:

$$(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n).(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n) := \sum_{n=0}^{\infty} (\sum_{k=0}^{n} a_k.b_{n-k}) x^n$$

Ver que está bien definida y si definimos

$$(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n) + (\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n) := \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n$$

entonces $A[[x]]$ resulta un anillo. ¿quién es $1_{A[[x]]}$?

(4) Probar que todo dominio de integridad finito es un cuerpo.

(5) Sea A un anillo conmutativo. Verificar que $\det : M_n(A) \to A$ es una función multiplicativa o sea que la demostración de algebra lineal para ver que $det(M.N) = det(M).det(N)$ es cierta en general. Ver que $M \in M_n(A)$ es inversible si y solo si $det(M)$ es una unidad. Hallar todos los elementos de $U(M_2(\mathbb{Z}_4))$.

(6) Sea $G_3 = \{1, t, t^2, \text{ con } t^3 = 1\}$, $A = \mathbb{R}[G_3]$.

   (a) Sea $e = \frac{1}{3}(1 + t + t^2)$ y $e' = (1 - e) = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}t - \frac{1}{3}t^2$. Ver que $e^2 = e$, $e'^2 = e'$ y $e.e' = 0$.

   (b) Sea B el anillo $e.A$ y C el anillo $e'.A$ con la multiplicación inducida por la de A. (¿porqué no son subanillos de A?). Probar que la aplicación $A \to B \times C$ definida por $a \mapsto (e.a, e'.a)$ define un isomorfismo de anillos, en donde $B \times C$ tiene la suma y producto coordenada a coordenada.

   (c) Ver que B tiene dimensión (sobre $\mathbb{R}$) 1 y C tiene dimensión 2, una base de B es por ejemplo $\{e\}$, y una basede C es $\{e', f\}$ donde $f = t - t^2 = e'.(t - t^2)$.Ver que valen los siguientes isomorfismos de anillos:

      (i) $B \cong \mathbb{R}$ vía $(e.(x.1 + y.t + z.t^2) \mapsto x + y + z)$

      (ii) $f^2 = -3.e'$, luego $C \cong \mathbb{C}$ vía $(a.e' + b.j) \mapsto a + b.i$, donde $j = \frac{f}{\sqrt{3}}$.

(7) Sea A un anillo. Un elemento $a \in A$ de dice *nilpotente* si existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $a^n = 0$. Probar:

   (a) Si $a \in A$ es un elemento nilpotente, entonces $1 - a$ es una unidad.

(b) $1-a.b$ es unidad si y sólo si $1-b.a$ es unidad. (sug.:demuéstrelo primero suponiendo que $a.b$ es nilpotente para así hallar una relación entre $(1-a.b)^{-1}$ y$(1-b.a)^{-1}$, ver después que esa relación vale en general).

(8) Sea D un entero. Definimos $\mathbb{Z}[\sqrt{d}] := \{a+b\sqrt{d}\}$ con a,b enteros.
   (a) Verificar que $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ con la suma y producto usual de números complejos es un anillo.
   (b) Sea $N : \mathbb{Z}[\sqrt{3}] \to \mathbb{Z}$ la función (norma) definida por $N(a+b\sqrt{3}) = a^2-3b^2$. Probar que N es una función multiplicativa.
   (c) Probar que $2+\sqrt{3}$ es una unidad.
   (d) Más generalmente, probar que $z \in \mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ es una unidad si y solo si $N(z) = \pm 1$.
   (e) ¿Hay infinitas unidades en $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$?

(9) Hallar TODAS las unidades de:
   - $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}[x]$.
   - K un cuerpo.
   - $\mathbb{Z}[i]$.
   - $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$.
   - $\mathbb{Z}[x]/ < x^2 >$.
   - $\mathbb{Z}[x]/ < x^3 >$.
   - $\mathbb{Z}[x]/ < x^n >$ donde $n \in \mathbb{N}$.

(10) Sea $I \subset A$ un ideal y A conmutativo, entonces:
   - I es un ideal primo si y solo si A/I es un dominio íntegro.
   - I es un ideal maximal si y solo si A/I es un cuerpo.

(11) Sea k un cuerpo y $A = k[x]$. Dado $f \in A$ ver que $A/ < f >$ es un cuerpo si y solo si f es irreducible.

(12) Sea k un cuerpo y sea $k[i] = k[G_2]$ (ver ejercicio (6)), o sea $k[i] := \{a.1+b.i\}$ con $a, b \in k$ (también lo notaremos $a+b.i$). Ver que si $k = \mathbb{Z}_2$ ó $\mathbb{Z}_5$, entonces $k[i]$ no es un cuerpo, pero si $k = \mathbb{Z}_3$ o $k = \mathbb{Z}_7$ sí lo es. ¿Cuando le parece que $Z_p[i]$ va a ser un cuerpo? (sin demostración).

(13) Demuestre que $k[i] \cong k[x]/ < x^2+1 >$. ¿Es "$x^2+1$" irreducible en $\mathbb{Z}_2$? en $\mathbb{Z}_3$? en $\mathbb{Z}_5$? en $\mathbb{Z}_{11}$? (comparar con ejercicio (11))

(14) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un morfismo de anillos. Probar que:
   (a) $f(\mathbb{N}) \subset \mathbb{N}$ y $f|_{\mathbb{N}} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es la identidad. Deducir que $f(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q}$ y $f|_{\mathbb{Q}} : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ es la identidad.
   (b) Si $a \geq 0$ entonces $f(a) \geq 0$. Deducir que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es necesariamente creciente. (¿quién es el núcleo de f?).
   (c) A partir de lo anterior ver que $f = id$.

(15) Sea p un primo. Probar que $\mathbb{Z}[x]/\langle p \rangle \simeq \mathbb{Z}_p[x]$.

(16) Probar que $\mathbb{Z}[i]/\langle 1+i \rangle \simeq \mathbb{Z}_2$.

(17) Caracterizar los siguientes anillos:
   (a) $\mathbb{Z}[i]/\langle 1+2i \rangle$
   (b) $\mathbb{Z}[x]/\langle 2, x \rangle$
   (c) $\mathbb{Z}[2]/\langle 2x \rangle$