Algebra II - Práctica 6

1er. Cuatrimestre 2004

Módulos Noetherianos

(1) Sea A un anillo, y M un A-módulo. Se define la torsión de M como $t(M) := \{m \in M \mid \exists\, a \in A, a \neq 0 \text{ con } a.m = 0\}$. Ver que si A es íntegro y conmutativo entonces $t(M)$ es un A-módulo. ¿Y si A no es conmutativo? ¿Y si A no es íntegro?.

(2) Sea A íntegro, M y N dos submódulos y $f : M \to N$ un morfismo de A-módulos. Ver que $f(t(M)) \subset t(N)$. Luego la asignación $M \to t(M)$ es functorial. Ver que $t(t(M)) = t(M)$ y $t(M/t(M)) = 0$.

(3) Sea $A = \mathbb{Z}$ y M el A-módulo $(\mathbb{C}^{\times}, *)$. Hallar los elementos de torsión de M.

(4) Sea $A = \mathbb{Z}$ y $M = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/\langle(4, 6)\rangle$. Calcular $t(M)$ y $M/t(M)$.

(5) Sea A un anillo, M un A-módulo y S un sistema de generadores de M. Decimos que S es un sistema de generadores *minimal* de M si ningún subconjunto propio de S es un sistema de generadores de M. Probar que:
   (a) Todo módulo de tipo finito posee un sistema de generadores minimal.
   (b) Consideremos a $\mathbb{Z}$ como un $\mathbb{Z}$-módulo. Para todo $n \in \mathbb{N}$ exite en $\mathbb{Z}$ un sistema de generadores minimal con n elementos.

(6) Dar un ejemplo de:
   (a) Un A-módulo finitamente generado que no sea Noetheriano.
   (b) Un A-módulo tal que todo submódulo propio sea finitamente generado y no sea Noetheriano.

(7) (a) $\mathbb{Z}$ y $k[x]$ (k cuerpo) son anillos noetherianos.
   (b) Si V es un k-espacio vectorial, V es noetheriano $\Leftrightarrow dim_k(V) < \infty$.

(8) Si A es noetheriano (a izquierda) y $f : A \to B$ un epimorfismo de anillos, entonces B es noetheriano (a izquierda).

(9) Si A es un anillo y $S \subset Z(A)$ es un subconjunto multiplicativamente cerrado, entonces los ideales de A_S están en correspondencia con los ideales de A que no contienen a S. Concluir que A noetheriano implica A_S noetheriano.

(10) k cuerpo, entonces $k[x, x^{-1}]$ es noetheriano.

(11) Sea A un anillo conmutativo finitamente generado como anillo, es decir, que existan $a_1, ..., a_r \in A$ tal que cualquier elemento de A se escribe como suma de monomios $a_1^{\alpha_1} ... a_r^{\alpha_r}$, entonces A es noetheriano.

(12) Sea $0 \to M \to N \to T \to 0$ una s.e.c. de A-módulos a izquierda donde A es noetheriano. Entonces N es de tipo finito $\Leftrightarrow$ M y T lo son.

(13) Sea M un A-módulo, $f \in End_A(M)$ y llamemos para cada $n \in \mathbb{N}$ $K_n := Ker(f^n)$ e $I_n := Im(f^n)$.
   (a) $K_1 = K_2$ entonces $K_1 \cap I_1 = 0$.
   (b) $I_1 = I_2$ entonces $K_1 + I_1 = M$.
   (c) M noetheriano entonces $\exists n \in \mathbb{N}$ / $K_n \cap I_n = 0$.
   (d) M noetheriano y f epi entonces f es un isomorfismo.

(14) Sea $S \subset Z(A)$ un subconjunto multiplicativamente cerrado.
   (a) Si $M \simeq \bigoplus_{i \in I} N_i$ entonces $M_S \simeq \bigoplus_{i \in I} (N_i)_S$.
   (b) M finitamente generado entonces M_S finitamente generado.

(c) si $0 \to M \to N \to T \to 0$ es una s.e.c. de A-módulos, entonces $0 \to M_S \to N_S \to T_S \to 0$ es una s.e.c. de A_S-módulos.

(d) M noetheriano entonces N_S es noetheriano.

(15) Sea $A = \prod_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}_{p^n}$, es un grupo abeliano que es un anillo con el producto coordenada a coordenada. Sea $B \subset A = (x_1, x_2, ..., x_n, ...) \in A$ tales que $x_{n+1} \equiv x_n (p^n)$.

(a) Dar ejemplos de tres elementos distintos en B. Demuestre que B es un subanillo que "contiene" a $\mathbb{Z}$, y que los coprimos con p son inversibles en B (sug.: ver que son inversibles en A y después ver que el inverso está en B).

(b) Considerar en $\mathbb{Z}$ la métrica inducida por el ideal $p.\mathbb{Z}$, es decir $d(x, y) = |x - y|_p$ donde $|x| = \frac{1}{p^n}$ si p aparece en la factorización de x con multiplicidad n (es decir, $x \in (p.\mathbb{Z})^n$ y $x \notin (p.\mathbb{Z})^{n+1}$, donde por convención $|0| = 0$). Si $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{Z}$ para esta métrica, entonces, ésta misma sucesión vista como elementos en B tiene límite (B resulta el completado de $\mathbb{Z}$ para esa métrica).