Algebra II - Práctica 8

1er. Cuatrimestre 2004

Módulos Libres, Proyectivos, Inyectivos y funtor Hom

(1) Sea $\mathcal{S}$ el espacio vectorial formado por las sucesiones de números reales que tienen límite, sea $\mathcal{S}_0$ las sucesiones que tienden a cero. Encuentre isomorfismos explícitos $\mathcal{S}/\mathcal{S}_0 \cong \mathbb{R}$, $\mathcal{S} \cong \mathbb{R} \oplus \mathcal{S}_0$, $\mathcal{S}^* \cong \mathcal{S}_0^* \oplus \mathbb{R}$.

(2) Sea R un anillo con noción de rango. Dados M, N dos R-módulos libres, probar que $M \simeq N$ si y solo si tienen igual rango.

(3) Sea R un anillo y M un R-módulo libre tal que existe una base de M con n elementos, y otra base de M con $n+1$ elementos. Probar que dado $m \geq n$ natural, existe una base de M con m elementos.

(4) Probar que $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ no es un $\mathbb{Z}$-módulo proyectivo.

(5) Probar que $\mathbb{Q}$ no es un $\mathbb{Z}$-módulo proyectivo.

(6) Sea R un anillo y $0 \to A \to B \to C \to 0$ una s.e.c. de R-módulos. Probar que si A y C son proyectivos, entonces B lo es.

(7) Describir TODOS los $\mathbb{Z}$-módulos proyectivos de tipo finito y TODOS los $k[x]$-módulos proyectivos de tipo finito (k un cuerpo).

(8) Probar que si existe un epimorfismo $\mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}^m$ entonces $n \geq m$. Si existe un monomorfismo $\mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}^m$ entonces $n \leq m$.

(9) Sea R un anillo conmutativo, $S \subset R$ un subconjunto multiplicativo y M un R-módulo proyectivo de tipo finito. Demuestre que M_S es un R_S-módulo proyectivo de tipo finito.

(10) Sea M un R-módulo a izquierda finitamente generado y proyectivo entonces $M^* = Hom_R(M, R)$ es un R-módulo a derecha finitamente generado y proyectivo.

(11) Un R-módulo M es finitamente generado y proyectivo si y solo si existen $x_i, ..., x_r \in M$ y $\phi_1, ..., \phi_r \in M^*$ tal que para todo $m \in M$ vale $m = \sum_{i=1}^r \phi_i(m).x_i$.

(12) Sea M un R-módulo proyectivo de tipo finito. Probar que M es isomorfo como R-módulo a $(M^*)^*$.

(13) Sea R un anillo conmutativo y M, N dos R-módulos finitamente generados y proyectivos. Probar que $Hom_R(M, N)$ es finitamente generado y proyectivo.

(14) Probar que todo módulo sobre un anillo de division es inyectivo y proyectivo.

(15) Probar que $\mathbb{Z}$ no es un $\mathbb{Z}$-módulo inyectivo.

(16) Recordar que dado R un anillo y M un R-módulo, M se dice divisible si para todo $r \in R$, $m' \in M$ existe $m \in M$ tal que $r.m = m'$. Probar que:
- G_{p^∞} es un grupo abeliano divisible.
- Todo grupo abeliano finito no trivial NO es divisible.
- Todo grupo abeliano finito libre no trivial NO es divisible.
- $\mathbb{Q}$ es un grupo abeliano divisible.

(17) Probar que:
- La imagen por un morfismo de grupos de un grupo abeliano divisible es divisible.
- Todo sumando directo de un grupo abeliano divisible es divisible.

(18) Probar que no existe un epimorfismo de grupos

(a) de $G_{p^\infty} \to G_{p^\infty} \oplus G_p$.
(b) de $\mathbb{Q}$ en $G_{p^\infty} \oplus G_{p^\infty}$.
(c) de $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ en $G_{p^\infty} \oplus G_n$.

(19) M es un R-módulo inyectivo si y sólo si toda sucesión exacta de R-módulos del tipo $0 \to M \to X \to Y \to 0$ se parte.

(20) Sea R un anillo cualquiera, demuestre que son equivalentes:
(a) Todo R-módulo es inyectivo.
(b) Todo R-módulo es proyectivo.
(c) Todo sucesión exacta de R-módulos se parte.
(d) Todo submódulo es un sumando directo.

(21) (a) Sean

$$\ldots \to P_2 \to P_1 \to P_0 \to M \to 0$$
$$\ldots \to Q_2 \to Q_1 \to Q_0 \to N \to 0$$

dos sucesiones exactas de R-módulos en donde los P_i y los Q_i son proyectivos ($i \geq 0$) y sea $f : M \to N$ un morfismo de R-módulos. Demuestre entonces que f se levanta a un morfismo de sucesiones exactas, es decir que existe una familia de morfismos $\{f_i\}_{i\geq 0}$, $f_i : P_i \to Q_i$ tales que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & P_2 \arrow[r] \arrow[d, "f_2"] & P_1 \arrow[r] \arrow[d, "f_1"] & P_0 \arrow[r] \arrow[d, "f_0"] & M \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & Q_2 \arrow[r] & Q_1 \arrow[r] & Q_0 \arrow[r] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

(b) Sean

$$0 \to M \to I_0 \to I_1 \to I_2 \to \ldots$$
$$0 \to N \to J_0 \to J_1 \to J_2 \to \ldots$$

dos sucesiones exactas de R-módulos en donde los I_i y los J_i son inyectivos ($i \geq 0$) y sea $f : M \to N$ un morfismo de R-módulos. Demuestre entonces que f se levanta a un morfismo de sucesiones exactas, es decir, a $\{f_i\}_{i\geq 0}$, $f_i : I_i \to J_i$ tales que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M \arrow[r] \arrow[d, "f"] & I_0 \arrow[r] \arrow[d, "f_0"] & I_1 \arrow[r] \arrow[d, "f_1"] & I_2 \arrow[r] \arrow[d, "f_2"] & \cdots \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r] & J_0 \arrow[r] & J_1 \arrow[r] & J_2 \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$