Algebra II - Práctica 9

1er. Cuatrimestre 2004

k-álgebras, producto tensorial, módulos playos.

(1) Si $(n, m) = c$ probar que $\mathbb{Z}_n \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_m = \mathbb{Z}_c$ donde por convencion $\mathbb{Z}_1 = 0$.

(2) Si A es un grupo abeliano y $m > 0$, $A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_m \cong A/mA$.

(3) Probar que $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \cong \mathbb{Q}$.

(4) Sea M un R-módulo proyectivo, entonces $R_S \otimes_R M$ es un R_S-módulo proyectivo.

(5) Sea $S \subset R$ un subconjunto multiplicativamente cerrado de un anillo conmutativo R. Si M es un R_S-módulo a derecha y N es un R_S-módulo a izquierda (luego son también R-módulos), entonces $M \otimes_{R_S} N = M \otimes_R N$.

(6) Sea M un R-módulo a derecha de torsión y N un R-módulo a izquierda divisible, entonces $M \otimes_R N = 0$. ¿Cuánto vale $G_{p^\infty} \otimes_{\mathbb{Z}} G_{p^\infty}$?

(7) Sea R un anillo, A y B R-módulos a izquierda, y $A' \subset A$, $B' \subset B$ submódulos. Probar que $A/A' \otimes_R B/B' \cong (A \otimes_R B)/C$ donde C es el subgrupo de $A \otimes_R B$ generado por los elementos $a' \otimes b$ y $a \otimes b'$ donde $a \in A$, $a' \in A'$, $b \in B$ y $b' \in B'$.

(8) Si M es un R-módulo a izquierda libre, entonces $- \otimes_R M$ es exacto, idem si M es proyectivo. ¿Es $\mathbb{Q}$ un $\mathbb{Z}$-módulo playo? ¿Es $\mathbb{Q}$ un $\mathbb{Z}$-módulo proyectivo?

(9) Sean M y N dos R-módulos a izquierda, y sea $M^* = Hom_R(M, R)$ que tiene una estructura de R-módulo a derecha. Verificar que la aplicación $M^* \times N \to Hom_R(M, N)$ que asigna al par (ϕ, n) el morfismo definido por $m \mapsto \phi(m).n$ es R-bilineal, por lo tanto define un morfismo de grupos abelianos $M^* \otimes_R N \to Hom_R(M, N)$. Ver que si M es R-proyectivo de tipo finito, entonces la aplicación definida anteriormente es un isomorfismo. (sug.: demostrar que si para un M dado es un isomorfismo entonces es también un isomorfismo para los M' que sean sumandos directos de M y para los $M' = M^n$, finalmente demostrar que para $M = R$ es un iso).

(10) Sea N un R-módulo tal que la aplicación del ejercicio anterior $N^* \otimes_R N \to End_R(N)$ es un isomorfismo, demostrar entonces que N es proyectivo de tipo finito (sugerencia: explotar el hecho de que la identidad de N está en la imagen).

(11) Sea R un anillo conmutativo, ver que si $R^{(I)} \cong R^{(J)}$ entonces el cardinal de I es igual al cardinal de J (sug.: usar $- \otimes_R R/\mathcal{M}$ donde $\mathcal{M}$ es algún ideal maximal de R).

Definición: si k es un anillo conmutativo con uno, una *k-algebra unitaria* A es un anillo unitario A junto con un morfismo de anillos $k \to Z(A)$ que hace de A un k-bimódulo simétrico.

(1) (Algebra tensorial, simétrica y exterior) Sea k un anillo conmutativo y V un k-módulo simétrico. Se define $T(V) = \oplus_{n \geq 0} V^{\otimes n}$ en donde se conviene que $V^{\otimes 0} = k$ y que $V^{\otimes n+1} = V^{\otimes n} \otimes V$. Es obviamente un k-módulo, que resulta una k-álgebra con la multiplicación dada por la yuxtaposición (i.e. $v_1 \otimes \cdots \otimes v_r \times w_1 \otimes \cdots \otimes w_s = v_1 \otimes \cdots \otimes v_r \otimes w_1 \otimes \cdots \otimes w_s$. Dicha álgebra se llama *álgebra tensorial*). Sea I_S el ideal bilátero generado por los elementos de la forma $v \otimes w - w \otimes v$ donde $v, w \in V$ y sea I_Λ el ideal bilátero generado por los elementos de la forma $v \otimes v$. Se define $S(V) := T(V)/I_S$

y $\Lambda(V) = T(V)/I_\Lambda$, se llaman respectivamente el álgebra simétrica y el álgebra exterior. Notación: a la clase módulo I_S de $v_1 \otimes ... \otimes v_k$ se la denotará $v_1...v_k$ y a su clase módulo I_Λ se la denotará $v_1 \wedge ... \wedge v_k$.
Ver que $S(V)$ es una k-álgebra conmutativa y que si V es un k-módulo finitamente generado, entonces $\Lambda(V)$ es tambien finitamente generado como k-módulo. Probar además que si A es una k-álgebra cualquiera, entonces

$$Hom_k(V, A) \cong Hom_{k-alg}(T(V), A)$$

si además A es conmutativa, entonces

$$Hom_k(V, A) \cong Hom_{k-alg}(S(V), A)$$

Si V es k-libre de base $\{x_1, ..., x_n\}$ demuestre que $S(V) \cong k[x_1, ..., x_n]$.

(2) Sea k un cuerpo y $f : V \to V$ un endomorfismo de un espacio vectorial de dimensión finita, $dim_k(V) = n$. Ver que $\Lambda(V) = \oplus_{i=0}^n \Lambda^i(V)$ donde $\Lambda^i(V) = Im(V^{\otimes i} \to \Lambda(V))$. Calcular la dimensión de cada $\Lambda^i(V)$, ver en particualar que $dim_k(\Lambda^n(V)) = 1$. Ver que $\Lambda(f) : \Lambda(V) \to \Lambda(V)$ (definido en el ejercicio anterior) se restringe para dar varias transformaciones lineales $\Lambda^i(f) : \Lambda^i(V) \to \Lambda^i(V)$. Como $\Lambda^n(V)$ tiene dimensión 1, $\Lambda^n(f)$ debe ser un múltiplo de la identidad, demuestre que $\Lambda^n(f) = det(f).id_{\Lambda^n(V)}$.
(3) Sean V y W dos k-módulos simétricos, demuestre que $S(V \oplus W) \cong S(V) \otimes_k S(W)$, en particular $k[x] \otimes_k k[y] \cong k[x, y]$.
(4) Sea A una k-algebra conmutativa, $M = A \otimes_k V$ donde V es un k-módulo. Demuestre que $T_A(M) \cong A \otimes T_k(V)$, $S_A(M) \cong A \otimes S_k(V)$ y $\Lambda_A(M) \cong A \otimes \Lambda_k(V)$, los isomorfismos son de k-algebras.