2^{do} cuatrimestre 2004

Álgebra II

Práctica 5-Adicionales

En esta práctica A será siempre un anillo conmutativo y $S \subset A$ será un conjunto multiplicativamente cerrado tal que $1 \in A$.

1. Sea $f : A \to S^{-1}(A)$ el morfismo $a \to \frac{a}{1}$.

   a) Probar que si $I \subset S^{-1}(A)$ es un ideal entonces $I = f^{-1}(I)S^{-1}(A)$. Así la aplicación $I \to f^{-1}(I)$ es una inyección del conjunto de ideales de $S^{-1}(A)$ en el conjunto de ideales de A. Esta aplicación preserva inclusión e intersecciones y manda ideales primos en ideales primos.

   b) Probar que un ideal $J \subset A$ es de la forma $f^{-1}(I)$ para algún ideal $I \subset S^{-1}(A)$ si y solo si $J = f^{-1}(JS^{-1}(A)$. Mostrar que este es el caso si y solo si cada elemento $s \in S$ no es un divisor de cero en A/J. En particular, la correspondencia $I \to f^{-1}(I)$ es una biyección entre los ideales primos de $S^{-1}(A)$ y los ideales primos de A que no intersecan a S.

2. Probar que si A es un anillo noetheriano $S^{-1}(A)$ es un anillo noetheriano.

3. Probar que si $I \subset A$ es un ideal maximal entre los ideales que no intersecan a S entonces I es primo.

4. Probar que si $\mathcal{N}$ es el nilradical de A entonces $S^{-1}(\mathcal{N})$ es el nilradical de $S^{-1}(A)$.