2^{do} *cuatrimestre 2004*

ÁLGEBRA II

Práctica 2

1. Sea G un grupo y sean X, Y subconjuntos no vacíos de G. Se define

$$X \cdot Y = XY = \{x \cdot y : x \in X,\, y \in Y\}$$

Si $x \in G$ escribimos $xH := \{x\}H$.

   a) ¿ Será cierto que si H y K son subgrupos de G entonces HK es subgrupo de G?

   b) Probar la equivalencia de las siguientes condiciones sobre un subgrupo H de G.

      1) $(\forall x)\, xH = Hx$

      2) $(\forall x)\, x^{-1}Hx \subset H$

      3) $(\forall x)\, x^{-1}Hx = H$

   Notar que cuando se verifica cualquiera de las condiciones anteriores H es un subgrupo normal.

2. Decidir cuáles de los subgrupos del ejercicio 6 de la práctica 1 son invariantes.

3. ¿Es $[G, G]$ un subgrupo invariante de $(G, *)$ para todo grupo $(G, *)$?

4. Sea G un grupo y H y K subgrupos.

   a) Si H ó K es normal entonces HK es subgrupo.

   b) Si H y K son subgrupos normales entonces $HK = KH$ es un subgrupo invariante de G.

5. Dados los siguientes subgrupos de S_4

   $K = \{id,\, (1\ 2)(3\ 4),\, (1\ 3)(2\ 4),\, (1\ 4)(2\ 3)\}$ $\quad H = \{id,\, (1\ 2)(3\ 4)\}$ $\quad U = <(1\ 2\ 3\ 4)>$

   a) Probar que $H \triangleleft K$, $K \triangleleft A_4$ y $K \triangleleft S_4$

   b) Probar que H no es invariante en A_4 ni en S_4

   c) Determinar si $U \triangleleft S_4$

6. Sean G y G' grupos y sea $f : G \to G'$ un morfismo. Probar que

   a) $\ker(f) \triangleleft G$

   b) ¿Es cierto que $\mathrm{im}(f) \triangleleft G'$?

c) Recíprocamente si H es un subgrupo normal de G, existe un grupo G' y un epimorfismo $f : G \longrightarrow G'$ tal que $\ker(f) = H$.

7. Sea G un grupo y H un subgrupo tal que $|G : H| = 2$. Probar que $H \triangleleft G$.

8. Hallar un sistema de representantes de G módulo S en los siguientes casos y determinar $|G : S|$

   a) $G = \mathbb{R} \qquad S = \mathbb{Z}$

   b) $G = GL(n, A) \qquad S = SL(n, A)$

   c) $G = D_n \qquad S =< r >$

   d) $G = \mathbb{C}^* \qquad S = S^1$

   e) $G = \mathbb{C}^* \qquad S = \mathbb{R}^* \cup \mathbb{R}^* i$

9. Sea G un grupo. Sea $a \in G$ y sea $I_a : G \longrightarrow G$ definida por $I_a(g) = a.g.a^{-1}$.

   a) Probar que I_a es un automorfismo de G (se denomina automorfismo interior de G).

   b) Probar que $Aut(G)$ es un grupo con la composición.

   c) Probar que la aplicación $I : G \longrightarrow Aut(G)$ es un morfismo de grupos y verificar que

   $$\ker(I) = \{a \in G \, : \, ag = ga, \forall g \in G\}$$

   Este subgrupo se llama el Centro de G y escribimos $\mathcal{C}(G)$.

   Probar que $\operatorname{im}(I)$ es un subgrupo invariante de $Aut(G)$.

   Deducir que $G/_{\mathcal{C}(G)} \simeq Int(G)$.

10. Sea G un grupo y H un subgrupo. Probar que $[G; G] \subseteq H \Leftrightarrow H \triangleleft G$ y G/H es abeliano.

11. Calcular todos los cocientes de S_3, D_4 y $\mathcal{H}$.

12. Probar que

    a) $\mathbb{C}^* /_{\mathbb{R}_{>0}} \simeq S^1$

    b) $\mathbb{Z} /_{m \cdot \mathbb{Z}} \simeq \mathbb{Z}_m$

    c) $GL_n(\mathbb{C}) /_{SL_n(\mathbb{C})} \simeq \mathbb{C}^*$

    d) $\mathbb{Q}^* /_{\mathbb{Q}_{>0}} \simeq G_2$

    e) $S^1 /_{G_n} \simeq S^1$

    f) Si $m \mid n$ entonces $G_n /_{G_m} \simeq G_{\frac{n}{m}}$

13. a) Sea $f : G \longrightarrow G'$ un isomorfismo y sea $H \triangleleft G$. Si $H' = f(H)$, probar que

1) $H' \triangleleft G'$

2) $G \big/ \mathrm{H} \simeq G' \big/ \mathrm{H'}$

b) ¿Qué pasa si $f : G \longrightarrow G'$ es un isomorfismo, $g : H \longrightarrow H'$ es un isomorfismo, $H \triangleleft G$, $H' \triangleleft G'$ con $G \big/ \mathrm{H}$ y $G' \big/ \mathrm{H'}$

14. Probar que los únicos grupos no abelianos de orden 8 son $\mathcal{H}$ y D_4.

15. Si $|G| = 2p$ entonces G es abeliano o $G \simeq D_p$.

16. Decidir cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuáles falsas

a) Si $|G : H| = 2$ y H es abeliano entonces $H \subset \mathcal{C}(G)$.

b) Si $|G| = n$ y k divide a n, existe un elemento de orden k.

c) Si $|G| = n$ y k divide a n, existe un subgrupo de orden k.

d) Si $\forall x \in G$, se tiene que $ord(x) < \infty \Rightarrow |G| < \infty$.

e) Si $p/|G|$, entonces existe H subgrupo tal que $|G : H| = p$.

f) Los elementos de orden finito de un grupo G forman un subgrupo.