# Álgebra II

## Práctica 3

1. Si $G \simeq_d H.K$ con $H$ y $K$ abelianos, entonces $G$ es abeliano.

2. Probar que $S_n$ y $D_n$ ; $n \geq 3$ son isomorfos a productos semidirectos convenientes.

3. ¿ Es $\mathcal{H}$ isomorfo a algún producto semidirecto ?

4. Probar que $S$ es un factor semidirecto de $G$ en los siguientes casos:

   *a*) $G = \mathbb{C}^*$ $\quad S = S^1$
   
   *b*) $G = G_{12}$ $\quad S = G_3$
   
   *c*) $G = \mathbb{C}$ $\quad S = \mathbb{R}$
   
   *d*) $G = GL(n, \mathbb{C})$ $\quad S = SL(n, \mathbb{C})$

5. Probar en cada uno de los siguientes casos que el grupo $G$ actúa sobre el conjunto $X$. En cada caso calcular ${}^{G}X$, las $G$-órbitas de $X$ y el estabilizador de cualquier elemento de $X$

   *a*) $G = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax + b \text{ con } a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R}\}$, $X = \mathbb{R}$ y $f.x = f(x)$
   
   *b*) $G = \mathbb{R}^*$, $X = \mathbb{R}_{>0}$ y $a.x = x^a$ con $a \in \mathbb{R}^*$ y $x \in \mathbb{R}_{>0}$.
   
   *c*) $G = SL(2, \mathbb{Z})$, $X = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ y $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (ax + by, cx + dy)$

6. Sea $G$ un grupo actuando sobre un conjunto $X$ y $S \triangleleft G$. Determinar la condición necesaria y suficiente para que exista una acción de $G/S$ en $X$ tal que $\bar{a} \cdot x = a \cdot x \quad \forall\, a \in G$ y $x \in X$.

7. Sea $X$ un conjunto finito. Determinar el número posible de acciones de $\mathbb{Z}$ sobre $X$.

8. Sea $G$ un grupo.

   *a*) Probar que si $|G| = p^n$ con $p$ primo y $n \in \mathbb{N}$ entonces $\mathcal{C}(G) \neq 1$
   
   *b*) Probar que si $G/_{\mathcal{C}(G)}$ es cíclico entonces $G$ es abeliano
   
   *c*) Probar que si $|G| = p^2$ con $p$ primo entonces $G$ es abeliano
   
   *d*) Caracterizar todos los grupos de orden $p^2$.
   
   *e*) Dar un ejemplo de un grupo $G$ no abeliano tal que $G/_{\mathcal{C}(G)}$ sea abeliano.

9. Sea $G$ un grupo no abeliano tal que $|G| = p^3$. Probar que $\mathcal{C}(G) = [G; G]$ y calcular $|\mathcal{C}(G)|$.

10. Sea $G$ un grupo tal que $|G| = 2n$, $G$ tiene $n$ elementos de orden $2$ y los restantes forman un subgrupo $H$. Probar que entonces $n$ es impar y $H \triangleleft G$.

11. Sea $p$ primo y $|G| = n$. Entonces existe $k$ tal que $n = p^k \Leftrightarrow \forall x \in G, ord(x) = p^s$ para algún $s$. ($s$ depende de $x$)

12. $G$ es un $p$-grupo $\Leftrightarrow \forall H \triangleleft G$, $H$ y $G/H$ son $p$-grupos.

13. Calcular todos los $p$- subgrupos de Sylow de:

$$\mathbb{Z}_2\,,\mathbb{Z}_{12}\,,\mathbb{Z}_{21}\oplus\mathbb{Z}_{15}\,,S_3\oplus\mathbb{Z}_3\,,S_3\oplus S_3$$

14. Sea $G$ un grupo, $|G| = pq$, $p > q$ primos tal que $q$ no divide a $p-1$. Probar que $G$ es cíclico.

15. Un grupo de orden $56$ no es simple.

16. Sean $p, q$ primos , $|G| = p^2 q$. Probar que $G$ no es simple.

17. Probar que no existen grupos simples de los siguientes órdenes:

    $30, 36, 56, 96, 200, 204, 260, 2540, 9075$.

18. Sea $G$ con $|G| < \infty$ y $p < q$ primos tal que $p^2$ no divide a $|G|$. Sean $H_p$ y $H_q$ subgrupos de Sylow de $G$ con $H_p \triangleleft G$. Probar

    a) $H_p.H_q$ es subgrupo de $G$
    
    b) $H_p.H_q \triangleleft G \Rightarrow H_q \triangleleft G$.

19. Sea $G$ un grupo y sea $H \triangleleft G$. Probar que $G$ es resoluble si y sólo si $H$ y $G \big/ H$ son resolubles.

20. Sean $p$ y $q$ primos distintos. Probar las siguientes afirmaciones:

    a) Todo grupo de orden $pq$ es resoluble.
    
    b) Todo grupo de orden $p^2 q$ es resoluble.
    
    c) Si $p$ y $q$ son impares, todo grupo de orden $2pq$ es resoluble.
    
    d) Todo grupo de orden menor que $60$ es resoluble.

21. Dado $G$ un grupo finito, se define la sucesión de subgrupos $\left\{G^{(n)}\right\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ recursivamente de la siguiente manera:

$$\begin{cases} G^{(0)} & = & G \\ G^{(n+1)} & = & [G^{(n)}, G^{(n)}]\ \forall\ n\ \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Probar que $G$ es resoluble si y sólo si existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $G^{(k)} = \{1\}$.