2^{do} cuatrimestre 2004

Álgebra II

Práctica 4

1. Probar que los siguientes conjuntos, con las operaciones definidas tienen estructura de anillo:

   a) $(A^{n\times n},+,\cdot)$ (matrices de $n\times n$, A anillo conmutativo).

   b) $\{f: A \longrightarrow A\}, A$ anillo; $(f+g)(a)=f(a)+g(a)$; $(f\cdot g)(a)=f(a)\cdot g(a)$

   c) $A_1\times\ldots\times A_n$; $A_1,\ldots,A_n$ anillos, suma y producto coordenada a coordenada

   d) $\{\mathcal{P}(X),\triangle,\cap\}$ con X conjunto

   e) $\mathbb{Z}[G]=\{\sum_{g\in G} a_g\cdot g \,/\, a_g\in\mathbb{Z}\}$ con $\sum a_g\cdot g+\sum b_g\cdot g=\sum(a_g+b_g)\cdot g$; $\sum a_g\cdot g\,.\,\sum a_h\cdot h=\sum a_g b_h gh$

   f) $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]=\{a+b\sqrt{d}\,:\,a,b\in\mathbb{Z}\}$ con $d\in\mathbb{Z}$, d libre de cuadrados.

   Decidir cuáles son conmutativos, cuáles son dominios íntegros, anillos de división, cuerpos.

2. Dar ejemplos de

   a) anillo de división que no sea cuerpo.

   b) anillo que no sea íntegro.

   c) anillo íntegro que no sea de división.

   d) dominio íntegro que no sea dominio principal.

3. ¿Existe algún producto $\cdot$ que haga de $(\mathbb{Z}_n,+,\cdot)$ un cuerpo? ($+$ es la suma usual)

4. Sea $A=\mathcal{C}[0,1]$ el anillo de funciones reales continuas definidas en $[0,1]$.

   a) ¿Hay divisores de cero en A?

   b) ¿Cuáles son los elementos inversibles en A?

5. Sea A un anillo con identidad 1

   a) Probar que $\mathcal{U}(A)=\{a\in A\,:\,a$ es inversible$\}$ es un grupo multiplicativo.

   b) Hallar $\mathcal{U}(\mathbb{Z}_m)$ para $m=3,4,5,6,8$.

   c) ¿Cuál es el orden de $\mathcal{U}(\mathbb{Z}_m)$?

   d) ¿Es $\mathcal{U}(\mathbb{Z}_8)\simeq\mathcal{U}(\mathbb{Z}_5)$?

6. Consideremos el anillo $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$

a) Probar que en $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ la escritura es única. Es decir que si $a + b\sqrt{3} = c + d\sqrt{3}$, entonces $a = c$ y $b = d$.

b) Sea $N : \mathbb{Z}[\sqrt{3}] \longrightarrow \mathbb{Z}$ la función (norma) definida por $N(a + b\sqrt{3}) = a^2 - 3b^2$. Probar que es multiplicativa.

c) Probar que $2 + \sqrt{3}$ es una unidad.

d) Probar que $z \in \mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ es una unidad si, y sólo si, $N(z) = 1$ ó $N(z) = -1$.

e) Hallar otras unidades de $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$.

7. Caracterizar el grupo de unidades de:

   $\mathbb{Z}$, $\mathbb{K}$ cuerpo, $\mathbb{Z}[i], \mathbb{Z}[\sqrt{-5}], B[X]$ con B dominio íntegro.

8. Sea D un dominio de integridad finito. Probar que D es un cuerpo.

9. Hallar todos los ideales primos de $\mathbb{Z}$.

10. Probar que si $\mathbb{K}$ es un cuerpo entonces $\mathbb{K}[X]$ es un dominio principal. ¿Es $\mathbb{Z}[X]$ un dominio principal?

11. Sea $f : A \longrightarrow B$ un morfismo de anillos. Probar que

    a) $\mathrm{im}(f)$ es un subanillo de B

    b) $\ker(f)$ es un ideal de A

    c) $A/\ker(f) \simeq \mathrm{im}(f)$ (como anillos)

12. Sea A un anillo. Probar que A es un anillo de división si, y sólo si, los únicos ideales a izquierda de A son 0 y A.

13. Sean A un anillo conmutativo e $\mathcal{I}$ un ideal de A. Probar que $\mathcal{I}$ es un ideal primo de A si y sólo si $A/\mathcal{I}$ es un dominio íntegro.

14. Probar que en un anillo conmutativo todo ideal maximal es primo.

15. Sea A un anillo conmutativo y sea $\mathcal{M}$ un ideal de A. Probar que $\mathcal{M}$ es maximal si y sólo si $A/\mathcal{M}$ es un cuerpo.

16. Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo y sea $f \in \mathbb{K}[X]$. Probar que $\mathbb{K}[X]/ < f >$ es un cuerpo, si y sólo si, f es irreducible en $\mathbb{K}[X]$. ¿Sigue valiendo esto si se reemplaza el cuerpo $\mathbb{K}$ por un anillo conmutativo A?

17. Probar que $\mathbb{Z}[X]/ < X^2 + 1 > \simeq \mathbb{Z}[i]$

18. Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo. Probar que los únicos ideales biláteros de $M_2(\mathbb{K})$ son 0 y $M_2(\mathbb{K})$. ¿Es $M_2(\mathbb{K})$ un anillo de división?

19. Sea A un anillo. Probar que existe un subanillo $B \subset A$ tal que $B \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ para algún $n \in \mathbb{N}_0$.

20. Probar que $\mathbb{Z}[i]/ < 1+i > \simeq \mathbb{Z}_2$ y caracterizar el anillo cociente $\mathbb{Z}[i]/ < 1+2i >$.

21. Probar que si $\mathcal{I}$ es un ideal primo de $\mathbb{Z}[X]$ entonces $\mathcal{I} \cap \mathbb{Z}$ es un ideal primo de $\mathbb{Z}$.

22. Sea $p \in \mathbb{Z}$ un primo. Probar que $\mathbb{Z}[X]/ < p > \simeq \mathbb{Z}_p[X]$.

23. Sean A un anillo e $\mathcal{I}$ un ideal de A. Probar que hay una correspondencia biyectiva entre los ideales de $A/\mathcal{I}$ y los ideales de A que contienen a $\mathcal{I}$.

24. Sea $p \in \mathbb{Z}$ un primo. Probar que $< p >$ es un ideal primo en $\mathbb{Z}[i]$ si, y sólo si, -1 no es un cuadrado en $\mathbb{Z}_p$.

25. Probar que todo morfismo de anillos que sale de un cuerpo es inyectivo.

26. Hallar las unidades de $\mathbb{Z}[X]/ < X^3 >$.

27. Probar que si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es un morfismo de cuerpos entonces $f = id$.

28. Hallar todos los morfismos de cuerpos $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ que satisfacen $f(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}$.