2^{do} cuatrimestre 2004

Álgebra II
Práctica 5

1. Sean A y B anillos conmutativos, $\mathcal{P}$ un ideal primo de B y $f : A \longrightarrow B$ un morfismo de anillos. Probar que $f^{-1}(\mathcal{P})$ es un ideal primo.

2. Caracterizar los anillos cocientes

$$\mathbb{Z}[X]/ < 2, X > \qquad \mathbb{Z}[X]/ < 2 > \qquad \mathbb{Z}[X]/ < 2X > \qquad \mathbb{Z}[X]/ < X^2 >$$

$$\mathbb{Z}[X]/ < X^2 + 1 > \quad \mathbb{Z}[X]/ < X^2 + X + 1 > \quad \mathbb{Z}[i]/ < 2 > \quad \mathbb{Z}[i]/ < 2, 1 + i >$$

3. Sean A un anillo conmutativo con unidad y A' subanillo con $1 \in A'$. Probar o dar contraejemplo:

   a) A cuerpo $\Rightarrow$ A' cuerpo

   b) A dominio íntegro $\Rightarrow$ A' dominio íntegro

   c) A' dominio íntegro $\Rightarrow$ A dominio íntegro

4. ¿El $\det : M_n(A) \longrightarrow A$ es un morfismo de anillos? ¿y la traza?

5. Mostrar isomorfismos de

   a) $\mathbb{Q}[X]/ < X^3 + X > \simeq \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}(i)$

   b) $\mathbb{R}[X]/ < X^4 - 1 > \simeq \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{C}$

6. Sean A anillo conmutativo y $f \in A[X]$, $f \neq 0$. Probar que f es divisor de cero en $A[X]$ si, y sólo si, existe $r \in A \setminus \{0\}$ tal que $rf = 0$.

7. Sean A dominio íntegro y $a \in A$. Probar que:

   a) a primo $\Rightarrow$ a irreducible

   b) A DFU, a irreducible $\Rightarrow$ a primo

   c) En $A = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$: $3, 7, 4 + \sqrt{-5}, 1 + 2\sqrt{-5}, 1 - 2\sqrt{-5}$ son irreducibles y no primos. ¿Es $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ DFU ? ¿Es DF?

8. $A \subseteq B \subseteq C$ dominios íntegros. Buscar algún ejemplo de A y C DFU, B no.

9. A dominio íntegro, I ideal propio de A; $\pi : A \longrightarrow A/I$ la proyección canónica. Sean $f = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \in A[X]$ mónico y $\bar{f} = \sum_{i=0}^{n} \pi(a_i) X^i \in A/I[X]$. Probar que:
   f es reducible en $A[X] \Rightarrow \bar{f}$ es reducible en $(A/I)[X]$

10. Sea A DFU y $\mathbb{K}$ su cuerpo de cocientes.

    a) Probar que si $f, g \in A[X]$ son polinomios primitivos, fg es primitivo.

    b) Probar que si $f \in A[X]$ es irreducible, entonces visto como polinomio con coeficientes en $\mathbb{K}$ también es irreducible.

    c) Probar que si $f \in A[X]$ es primitivo y f es irreducible en $\mathbb{K}[X]$ entonces f es irreducible en $A[X]$.

    d) Probar que $A[X]$ es DFU.

11. **Criterio de irreducibilidad de Eisenstein:** Sea A un DFU y $\mathbb{K}$ su cuerpo de cocientes. Sea $f = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \in A[X]$. Supongamos que exista un primo $p \in A$ tal que:

    a) p no divide a a_n

    b) p divide a a_i, $0 \leq i \leq n-1$

    c) p^2 no divide a a_0

    Probar que f es irreducible en $\mathbb{K}[X]$

12. **Lema de Gauss:** Sea A un DFU y $\mathbb{K}$ su cuerpo de cocientes. Sea $f = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \in A[X]$ con $a_0 \neq 0$. Si p y q son elementos de A no nulos, coprimos entre sí tales que $\frac{p}{q} \in \mathbb{K}$ es raíz de f, demostrar que p/a_0 y q/a_n en A.

13. Probar que todo **ideal primo** de $\mathbb{Z}[X]$ es alguno de los siguientes:

    a) $< p >$ ó $< p, f >$ con $p \in \mathbb{Z}$ primo, $f \in \mathbb{Z}[X]$ tal que $\bar{f} \in \mathbb{Z}_p[X]$ es irreducible en $\mathbb{Z}_p[X]$

    b) $< f >$ donde f es primitivo e irreducible en $\mathbb{Q}[X]$

14. Sean $\mathbb{K}$ un cuerpo y $f, g \in \mathbb{K}[X_1, \ldots, X_n]$. Probar que:

    a) $f + g = 0$ ó $\mathrm{gr}(f+g) \leq \max\{\mathrm{gr} f, \mathrm{gr} g\}$

    b) $fg = 0 \Rightarrow f = 0$ ó $g = 0$. (Es decir, $\mathbb{K}[X_1, \ldots, X_n]$ es un dominio íntegro)

    c) $\mathrm{gr}(fg) = \mathrm{gr} f + \mathrm{gr} g$. (Sug: descomponer a f y g en suma de polinomios homogéneos.)

    d) Cuáles son los elementos inversibles de $\mathbb{K}[X_1, \ldots, X_n]$?

e) Probar que $\mathbb{K}[X_1, \ldots, X_n]$ tiene una estructura de $\mathbb{K}$-espacio vectorial y exhibir una base.

f) Un polinomio de grado d en una variable tiene, a lo sumo, $d+1$ coeficientes no nulos o monomios. Cuántos coeficientes no nulos puede tener un polinomio de grado d en 2 variables?

g) Cuántos coeficientes no nulos puede tener un polinomio homogéneo de grado d en n variables?

h) Cuántos coeficientes no nulos puede tener un polinomio cualquiera de grado d en n variables?

i) Cuál es la dimensión del $\mathbb{K}$-espacio vectorial $\mathbb{K}[X_1, \ldots, X_n]_{\leq d} = \{f \in \mathbb{K}[X_1, \ldots, X_n] : f = 0 \text{ ó } \mathrm{gr} f \leq d\}$.

15. Caracterizar los anillos cocientes:

$$\mathbb{R}[X,Y,Z]/_{< X, Y >} \qquad \mathbb{R}[X,Y,Z]/_{< X - Y^5 >} \qquad \mathbb{R}[X,Y,Z]/_{< Y - Z^3, Z - X^3 >}$$

16. Mostrar que $X^2 + Y^2 - 1$ y $XT - YZ$ son irreducibles en $\mathbb{Q}[X,Y]$ y $\mathbb{Q}[X,Y,Z,T]$ respectivamente.

17. Sea $I = < Y + X^2 - 1, XY - 2Y^2 + 2Y > \subset \mathbb{R}[X,Y]$. Decidir si $\mathbb{R}[X,Y]/I$ es un cuerpo.