

ÁLGEBRA II

Práctica 6

A lo largo de esta práctica A -módulo significará A -módulo a izquierda.

1. Determinar si M es un A -módulo en cada uno de los siguientes casos:

a) $A = \mathbb{Z}_n$, $M = \mathbb{Z}_m$, con $n, m \in \mathbb{N}$ tales que m divide a n , con la suma usual de \mathbb{Z}_m y la acción

$$a \cdot x = r_m(ax).$$

b) $A = \mathbb{Z}$, $M = M_2(\mathbb{C})$, con la suma usual de matrices y la acción

$$a \cdot \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot z_{11} & a \cdot z_{12} \\ a \cdot z_{21} & a \cdot z_{22} \end{pmatrix}.$$

c) $A = \mathbb{R}[X]$, $M = \mathbb{R}^n$, con la suma usual de \mathbb{R}^n y la acción

$$f \cdot (x_1, x_2, \dots, x_n) = (f(1) \cdot x_1, f(0) \cdot x_2, \dots, f(0) \cdot x_n).$$

d) $A = M_n(\mathbb{Z})$, $M = \mathbb{Z}$, con la suma usual de números enteros y la acción

$$a \cdot m = \det(a) \cdot m.$$

2. Sea \mathbb{K} un cuerpo

a) Sea V un \mathbb{K} -espacio vectorial y sea $u \in \text{End}_{\mathbb{K}}(V)$. Probar que existe una única estructura de $\mathbb{K}[X]$ -módulo en V que satisface

$$(kX^0) \cdot v = k \cdot v$$

$$X \cdot v = u(v).$$

b) Sea M un $\mathbb{K}[X]$ -módulo y sea $u : M \rightarrow M$ la aplicación definida por $u(v) = X \cdot v$. Probar que con la acción $k \cdot v = (kX^0) \cdot v$ M es un K -espacio vectorial y $u \in \text{End}_{\mathbb{K}}(M)$.

3. Sean A y B anillos, sea M un B -módulo y sea $\varphi : A \rightarrow B$ un morfismo de anillos. Probar que la acción $a \cdot \varphi x = \varphi(a) \cdot x$ define una estructura de A -módulo sobre M .

Sea M un A -módulo y sea S un subconjunto de M . Se llama **anulador** de S al conjunto

$$\text{An}(S) = \{a \in A \mid a \cdot s = 0 \quad \forall s \in S\}.$$

Si $x \in M$, $\text{An}(\{x\})$ será denotado $\text{An}(x)$.

Un A -módulo M se dice **fiel** si $\text{An}(M) = \{0\}$.

4. Probar que

- a) $\text{An}(S)$ es un ideal a izquierda de A .
- b) $\text{An}(S) = A$ si y sólo si $S \subseteq \{0\}$.
- c) Si $S \subseteq T$ entonces $\text{An}(T) \subseteq \text{An}(S)$.
- d) $\text{An}(S) = \bigcap_{s \in S} \text{An}(s)$.
- e) $M_n(A)$ es un A -módulo fiel y exhibir otros ejemplos de módulo fiel.
- f) \mathbb{Z}_n , con $n > 2$, no es un \mathbb{Z} -módulo fiel y hallar $\text{An}(\mathbb{Z}_n)$.
- g) Si $J \neq \emptyset$ entonces $\text{An}(M^J) = \text{An}(M^{(J)}) = \text{An}(M)$.

Sea M un A -módulo y sean S un subconjunto de M y N un submódulo de M . Se llama **transportador** de S en N al conjunto

$$(N : S) = \{a \in A : a \cdot s \in N \quad \forall s \in S\}$$

Si $x \in M$, $(N : \{x\})$ será denotado $(N : x)$.

5. Probar que

- a) $(N : S)$ es un ideal a izquierda de A .
- b) $(0 : S) = \text{An}(S)$ y $(N : S) = A$ si y sólo si $S \subseteq N$.
- c) Si $S \subseteq T$ entonces $(N : T) \subseteq (N : S)$.
- d) Si P es un submódulo de M tal que $N \subseteq P$ entonces $(N : S) \subseteq (P : S)$.
- e) $(N : x) \cdot x = N \cap A \cdot x$.
- f) Si $J \neq \emptyset$ entonces $(N^J : M^J) = (N^{(J)} : M^{(J)}) = (N : M)$.
- g) Hallar $(m\mathbb{Z} : n)$ para $m, n \in \mathbb{N}$.

6. Determinar si S es un submódulo del A -módulo M en cada uno de los siguientes casos:

- a) $A = \mathbb{Q}$, $M = M_n(\mathbb{Q})$, $S = \{(a_{ij}) \in M_n(\mathbb{Q}) : a_{ii} = 0 \forall 1 \leq i \leq n\}$.
- b) $A = \mathbb{Z}$, $M = M_n(\mathbb{Z})$, $S = \{(a_{ij}) \in M_n(\mathbb{Z}) : \det(a_{ij}) = 0\}$
- c) A un anillo cualquiera, $M = A^n$, $S = \{(x_1, \dots, x_n) \in A^n : x_1 + \dots + x_n = 0\}$.
- d) A un anillo cualquiera, $M = A[X]$, $S = \{f \in A[X] : f = 0 \text{ o } \deg(f) \leq n\}$ ($n \in \mathbb{N}$).

7. Sean A un anillo conmutativo, $a \in A^{n \times m}$ y $f_a : A^{m \times 1} \rightarrow A^{n \times 1}$ la aplicación definida por $f_a(x) = a \cdot x$ (donde \cdot es el producto de matrices). Probar que es un morfismo de A -módulos.

8. Sean A un anillo conmutativo y M un A -módulo. En cada uno de los siguientes casos, probar que f es un morfismo de A -módulos, hallar su núcleo, su imagen y determinar si es monomorfismo, epimorfismo, sección, retracción o isomorfismo:

- a) $f : M^n \longrightarrow M^2$, $f(x) = (x_1 + x_n, x_n)$ ($n > 2$).
- b) $f : M^n \longrightarrow M^n$, $f(x) = (x_1, x_1 + x_2, \dots, x_1 + \dots + x_n)$.
- c) Si $n \leq m$, $f : M^n \longrightarrow M^m$, $f(x) = (x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0)$.
- d) Si $n \leq m$, $f : M^m \longrightarrow M^n$, $f(x) = (x_1, \dots, x_n)$.
- e) Fijo $a \in A$, $f : A[X] \longrightarrow A$, $f(g) = g(a)$.
- f) $f : M_n(A) \longrightarrow A^n$, $f(a) = (a_{11}, \dots, a_{nn})$ si $a = (a_{ij})$
- g) $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, $f(x) = 2x$.

9. Si M y N son conjuntos y $f : M \longrightarrow N$ es una función, el conjunto

$$\Gamma(f) = \{(x, f(x)) : x \in M\}$$

se llama el gráfico de f . Probar que si M y N son A -módulos entonces f es un morfismo de A -módulos si y sólo si $\Gamma(f)$ es un submódulo de $M \oplus N$.

10. Sea A un anillo y sean M y N dos A -módulos. Probar que si $f : M \longrightarrow N$ es un morfismo de A -módulos entonces $\ker(f)$ es un submódulo de M , $\text{im}(f)$ es un submódulo de N y $M / \ker(f) \simeq \text{im}(f)$.

11. Sean A un anillo y M un A -módulo. Caracterizar el módulo cociente N/S en cada uno de los siguientes casos:

- a) $N = M^n$, $S = \{x \in N : x_1 + \dots + x_n = 0\}$.
- b) $N = M^n$ ($n > 2$) , $S = \{x \in N : x_1 = x_n \text{ y } x_2 = 0\}$.
- c) $N = A[X]$, $S = \{f \in A[X] : f(1) = 0\}$.
- d) $N = M_n(A)$, $S = \{(a_{ij} \in M_n(A) : a_{ii} = 0 \forall 1 \leq i \leq n)\}$.
- e) $N = M^J$, $S = \{x \in N : x_i = 0 \forall i \in I\}$, donde I es un subconjunto fijo de J .

12. a) Probar que si $f, g : (\mathbb{Q}, +) \longrightarrow (\mathbb{Q}, +)$ son morfismos de grupos entonces son equivalentes:

- 1) $f(1) = g(1)$.
- 2) $f(m) = g(m) \forall m \in \mathbb{Z}$.
- 3) $f = g$.

- b) Probar que si $f : (\mathbb{Q}, +) \longrightarrow (\mathbb{Q}, +)$ es un morfismo de grupos tal que $f(1) = 1$ entonces $f = id_{\mathbb{Q}}$.
- c) Sean V y W dos \mathbb{Q} -espacios vectoriales y sea $f : V \longrightarrow W$ una aplicación. Probar que f es una transformación lineal de \mathbb{Q} -espacios vectoriales si, y sólo si, $f : (V, +) \longrightarrow (W, +)$ es un morfismo de grupos .
13. Sea A un anillo y sean M y N dos A -módulos. Probar que
- a) $Hom_A(M, N)$ con la suma definida por $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ es un grupo abeliano.
- b) Si A es conmutativo, la acción $(a.f)(x) = a.f(x)$ define sobre el grupo abeliano $Hom_A(M, N)$ una estructura de A -módulo. Para A no necesariamente conmutativo, esta acción define sobre $Hom_A(M, N)$ una estructura de $\mathcal{C}(A)$ -módulo.
14. Sea A un anillo conmutativo. Dado un A -módulo M se llama *dual* de M al A -módulo $M^* = Hom_A(M, A)$. Probar que la aplicación $\psi : M \longrightarrow M^{**}$ definida por
- $$\psi(x)(f) = f(x) \quad (x \in M, f \in M^*)$$
- es un morfismo de A -módulos y que $\ker(\psi) = \bigcap_{f \in M^*} \ker(f)$.
15. Sea M un A -módulo. Probar que $Hom_A(A, M) \simeq M$ como $\mathcal{C}(A)$ -módulos.
16. Probar que $Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}, \mathbb{Q}) \simeq \mathbb{Q}$.
17. Probar que un A -módulo M es simple si, y sólo si, $M \neq \{0\}$ y $A.x = M \quad \forall x \in M$ tal que $x \neq 0$.
18. Sea $f : M \longrightarrow N$ un morfismo de A -módulos. Probar que:
- a) Si M es simple entonces $f = 0$ o f es un monomorfismo.
- b) Si N es simple entonces $f = 0$ o f es un epimorfismo.
- c) Si M y N son simples entonces $f = 0$ o f es un isomorfismo.
19. Sea M un A -módulo. Probar que $End_A(M) = Hom_A(M, M)$ con la suma definida por $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ y la composición de funciones es un anillo y que, cuando M es simple, $End_A(M)$ es un anillo de división.