2^{do} cuatrimestre 2004

Álgebra II
Práctica 7

1. Probar que los grupos abelianos $\mathbb{Q}^*$, $\mathbb{R}^*$, $\mathbb{C}^*$, $\mathbb{Q}_{>0}$ y $\mathbb{R}_{>0}$ no son finitamente generados

2. Probar que

   a) Todo módulo de tipo finito posee un sistema de generadores minimal

   b) Para todo $n \in \mathbb{N}$ existe en $\mathbb{Z}$ (considerando a $\mathbb{Z}$ como $\mathbb{Z}$-módulo) un sistema de generadores minimal con n elementos

3. Probar que

   a) Todo submódulo de un módulo localmente cíclico es localmente cíclico

   b) Si M es localmente cíclico y $f : M \longrightarrow N$ es un epimorfismo de A-módulos entonces N es localmente cíclico

   c) $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{Q}/_{\mathbb{Z}}$ son grupos abelianos ($\mathbb{Z}$-módulos) localmente cíclicos pero no son de tipo finito

4. Sea A un dominio íntegro y sea $a \in M_n(A)$. Para cada $1 \leq j \leq n$ sea $v_j = (a_{1j}, \ldots, a_{nj}) \in A^n$. Probar que

   a) $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es linealmente independiente si y sólo si $det(A) \neq 0$.

   b) $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es un sistema de generadores de A^n si y sólo si $det(A) \in \mathcal{U}(A)$.

   item Sea A un anillo y sea M un A-módulo. Probar que si todo conjunto no vacío de submódulos finitamente generados de M tiene un elemento maximal entonces M es Noetheriano

5. Dar un ejemplo de

   a) Un A-módulo finitamente generado que no sea Noetheriano.

   b) Un A-módulo tal que todo submódulo propio sea finitamente generado y que no sea Noetheriano.

6. Probar que

   a) Un $\mathbb{K}$-espacio vectorial V es Noetheriano si y sólo si $dim_K(V) < \infty$.

   b) Todo anillo principal a izquierda es Noetheriano a izquierda.

   c) $\mathbb{Z}$ y $K[X]$ (con K cuerpo) son anillos Noetherianos.

7. Sea A un anillo y sea M un A-módulo. Sea $f \in End_A(M)$ y, para cada $n \in \mathbb{N}$, sean $K_n = Ker(f^n)$, $I_n = Im(f^n)$. Probar que

   a) $K_1 = K_2 \Rightarrow K_1 \cap I_1 = 0$.

   b) $I_1 = I_2 \Rightarrow K_1 + I_1 = M$.

   c) Si M es Noetheriano entonces $\exists\, n \in \mathbb{N}$ tal que $K_n \cap I_n = 0$.

   d) Si M es Noetheriano y f es un epimorfismo entonces f es un automorfismo.

8. Sea $d \in \mathbb{Z}$ y sea $\sqrt{d}$ una raíz cuadrada de d en $\mathbb{C}$. Sea $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ el submódulo de $\mathbb{C}$ formado por los elementos de la forma $a + b\sqrt{d}$ con $a, b \in \mathbb{Z}$. Probar que $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ es Noetheriano

9. Probar que no existe un epimorfismo de grupos

   a) de $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ en $\mathbb{Z}_{p^\infty} \oplus \mathbb{Z}_p$

   b) de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{Z}_{p^\infty} \oplus \mathbb{Z}_{p^\infty}$

   c) de $\mathbb{Q}/_{\mathbb{Z}}$ en $\mathbb{Z}_{p^\infty} \oplus \mathbb{Z}_n$

10. Sea p un primo. Probar que no existe una sección

    a) de $\mathbb{Z}_p$ en $\mathbb{Z}_{p^2} \oplus \mathbb{Z}_{p^2}$

    b) de $\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p$ en $\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_{p^2}$

    c) de $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_p$ en $\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_{p^2}$

11. 14. Calcular

    a) $Hom(\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}_n\,,\, \mathbb{Z}_p)$

    b) $Hom(\bigoplus_{p\ primo} \mathbb{Z}_p\,,\, G_3)$

12. Sea G un grupo abeliano y sean S y T subgrupos de G tales que $G \sim S \oplus T$. Probar que si existe un monomorfismo de $\mathbb{Q}$ en G entonces existe un monomorfismo de $\mathbb{Q}$ en S o existe un monomorfismo de $\mathbb{Q}$ en T.

13. *a*) Sea $e : \mathbb{Z}_n \longrightarrow \mathbb{Z}_n$ un morfismo de grupos. Probar que e es un proyector si y sólo si $\exists\, a \in \mathbb{Z}_n$ tal que $n \mid a^2 - a$ y $e(x) = a.x$ para todo $x \in \mathbb{Z}_n$

    b) Sea $a \in \mathbb{Z}_n$, sea $f : \mathbb{Z}_n \longrightarrow \mathbb{Z}_n$ el morfismo definido por $f(x) = a.x$ y sea $d = (a, n)$. Probar que $Ker(f) = < \frac{n}{d} >$ y que $Im(f) = < d >$

    c) Sean $n, d \in \mathbb{Z}$. Probar que si $n = p_1^{\alpha_1} \ldots p_r^{\alpha_r}$, con $p_1, \ldots, p_r$ primos positivos distintos y $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{N}$ entonces $d = (a, n)$ para algún $a \in \mathbb{Z}$ tal que n divide a $a^2 - a$ si, y sólo si, $d = p_1^{\beta_1.\alpha_1} \ldots p_r^{\beta_r.\alpha_r}$ con $\beta_i \in \mathbb{N}_0$, $0 \le \beta_i \le 1$

d) Encontrar los sumandos directos de $\mathbb{Z}_n$ y, para cada uno de ellos, determinar un suplemento

14. Sea

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & M' & \longrightarrow & M & \longrightarrow & M'' & \longrightarrow & 0 \\ & & f' \downarrow & & f \downarrow & & & & \\ 0 & \longrightarrow & N' & \longrightarrow & N & \longrightarrow & N'' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

un diagrama conmutativo de A-módulos, con filas exactas. Probar que existe una única $f'' : M'' \longrightarrow N''$ que completa el diagrama conmutativo y que, si f y f' son isomorfismos, entonces f'' es un isomorfismo.

15. Sea A un anillo y M un A-módulo. Decidir si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa:

a) Si M es libre, entonces es sin torsión.

b) Si A es íntegro entonces M libre $\Rightarrow$ M sin torsión.

c) Si $f : M \longrightarrow N$ es un morfismo de A-módulos y M es de torsión entonces $Im(f)$ es de torsión.

d) Si $f : M \longrightarrow N$ es un morfismo de A-módulos y M es sin torsión entonces $Im(f)$ es sin torsión.

e) Si A es conmutativo y N es sin torsión entonces $Hom_A(M,N)$ es sin torsión.

f) Si A es conmutativo, M es de torsión y N es sin torsión entonces $Hom_A(M,N) = 0$.

16. Calcular $t\left(\mathbb{R}/_{\mathbb{Z}}\right)$.

17. Sea A un dominio principal que no es un cuerpo y sea M un A-módulo. Probar:

a) Sea $p \in A$ un irreducible y $a \in A - \{0\}$. Entonces $(A/<a>)[p] \simeq A/<p^n>$ donde $n = \max\{k \in \mathbb{N}_0 \ / \ p^k | a\}$.

b) M es simple $\iff$ $\exists\, p \in A$ irreducible tal que $M \simeq A/<p>$.

c) M es un A-módulo sin torsión $\iff$ $Hom_A(S,M) = 0$ para todo A-módulo simple S.

18. Sea A un dominio principal y sea M un A-módulo de tipo finito (es decir finitamente generado). Probar:

a) M es de torsión $\iff$ $Hom_A(M,A) = 0$.

b) M es indescomponible (es decir, no tiene sumandos directos propios) $\iff$ $M \simeq A$ o $\exists\, p \in A$ irreducible y $n \in \mathbb{N}$ tales que $M \simeq A/ < p^n >$.

19. Sea A un dominio principal y sea M un A-módulo. Probar:

    a) Si M es de tipo finito y S es un submódulo libre de M tal que M/S es sin torsión, entonces M es libre.

    b) Si M no es de torsión y M/S es de tipo finito con torsión para todo submódulo $S \neq 0$ de M, entonces $M \simeq A$. Análogamente, si G es un grupo infinito tal que todo subgrupo no nulo tiene índice finito, $G \simeq \mathbb{Z}$.

20. Sea p un primo positivo. Clasificar todos los grupos abelianos de orden p^3, p^4 y p^5.

21. Clasificar los grupos abelianos de orden 18, 45, 100 y 180.

22. *a*) Sea G un grupo abeliano finito y sea p un primo positivo que divide al orden de G. Probar que el número de elementos de orden p en G es coprimo con p.

    b) Para cada grupo abeliano G de orden p^2q^2 (donde p y q son primos distintos) determinar cuántos elementos de orden pq y cuántos elementos de orden pq^2 hay en G.

23. Caracterizar los grupos abelianos finitamente generados tales que:

    a) Todo subgrupo propio de G es cíclico.

    b) Todo subgrupo propio de G es de orden primo.

    c) G posee exactamente 2 subgrupos propios no nulos.

    d) G posee exactamente 3 subgrupos propios no nulos.

    e) Todo subgrupo propio no nulo de G es maximal.

    f) Para todo par de subgrupos S y T de G, $S \subseteq T$ o $T \subseteq S$.

    g) El orden de todo elemento no nulo de G es primo.

    h) $G/_S$ es cíclico para todo subgrupo S no nulo de G.

    i) Todo par de subgrupos propios no nulos son isomorfos.

24. Calcular los factores invariantes (coeficientes de estructura) de los siguientes grupos abelianos:

    a) $\mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_6 \oplus \mathbb{Z}_9$.

    b) $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_8 \oplus \mathbb{Z}_{14}$.

    c) $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_{49} \oplus \mathbb{Z}$.

    d) $\mathbb{Z}_{12} \oplus \mathbb{Z}_{21} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_{20} \oplus \mathbb{Z}_9 \oplus \mathbb{Z}_7$.

e) G un grupo abeliano de orden 36 que tiene exactamente 2 elementos de orden 3 y que no tiene elementos de orden 4.

f) G un grupo abeliano de orden 225 que tiene por lo menos 40 elementos de orden 15 y tal que todo subgrupo de orden 9 de G es isomorfo a $\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3$.

25. Determinar los factores invariantes de los siguientes grupos abelianos dados por generadores y relaciones:

   a) $G =< a, b, c >; \quad 2a + 3b = 0; \quad 2a + 4c = 0$

   b) $G =< a, b, c >; \quad a = 3b; \quad a = 3c$

   c) $G =< a, b, c >; \quad 3a = -c; \quad 3a = 3c - 8b$

   d) $G ==< a, b, c >; \quad 3a = b; \quad b = 3c$

26. Calcular los coeficientes de estructura de los siguientes cocientes:

   a) $\mathbb{Z}^4/S$ con $S = \{m \in \mathbb{Z}^4 \ / \ m_1 + m_2 + m_3 + m_4 = 0, \ m_1 + m_2 - 2m_3 = 0\}$.

   b) $\mathbb{Z}^3/S$ con $S = \{m \in \mathbb{Z}^3 \ / \ m_1$ es par, $m_1 + 5m_2 - m_3 = 0\}$.

   c) $\mathbb{Z}^3/S$ con $S = \{m \in \mathbb{Z}^3 \ / \ m_1 = m_2 + m_3$ es par, $3|m_3\}$.

27. Sean p, q y r primos positivos. Determinar la cantidad de grupos no isomorfos de orden n, en cada uno de los siguientes casos:

   a) $n = p^6 q^3 r$.

   b) $n = p^2 q^4 r^5$.

   c) $n = p^3 q^4$.

28. *a*) Sea G un grupo abeliano de orden n. Probar que si d es un divisor de n, G posee subgrupos y grupos cocientes de orden d.

   b) Sea $n \in \mathbb{N}$. ¿Para qué divisores d de n existe un grupo abeliano de orden n y exponente d?

   c) Caracterizar los grupos abelianos finitos de orden menor o igual que 100 de exponente 9, 20 y 21.

   d) Sea G un grupo abeliano y sea $x \in G$ un elemento tal que $\operatorname{ord}(x) = \exp(G)$. Probar que $< x >$ es un sumando directo de G.