Álgebra II

Primer Cuatrimestre 2005

Práctica 1

1) Sea X un conjunto con una operación interna $*: X \times X \to X$. Para $x_i \in X$ definimos inductivamente

$$\prod_{i=1}^{n} x_i = x_1 * \cdots * x_n = (x_1 * \cdots * x_{n-1}) * x_n$$

Demostrar que si $*$ es asociativa entonces vale

$$\prod_{i=1}^{n} x_i = (\prod_{i=1}^{m} x_i) * (\prod_{i=m+1}^{n} x_i)$$

para todo $m \leq n$. Deducir que en un producto se pueden insertar paréntesis de cualquier manera, sin alterar el resultado.

2) Con la notación de 1), supongamos que $*$ es asociativa y conmutativa. Demostrar que para toda biyección $\sigma : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ vale

$$x_1 * \cdots * x_n = x_{\sigma(1)} * \cdots * x_{\sigma(n)}$$

Sea J un conjunto finito y $x : J \to X$ una función (también escrita $(x_j)_{j \in J}$, pensada como familia de elementos de X parametrizada por el conjunto de índices J). Si $*$ es asociativa y conmutativa, darle sentido a la expresión $\prod_{j \in J} x_j$.

3) Sea S el sub-semigrupo de $(\mathbb{N}, +)$ generado por $\{2, 3\}$. Verificar que $\mathbb{N} = S \cup \{1\}$.

4) Para cada $m \in \mathbb{N}$, denotemos $\mathbb{N}_{\geq m} = \{n \in \mathbb{N}/n \geq m\} \cup \{0\}$, que es un sub-semigrupo de $(\mathbb{N}, +)$. Encontrar un conjunto finito de generadores de $\mathbb{N}_m$.

5) Sea X un conjunto y X^X el conjunto de todas las funciones $X \to X$. Si $\circ$ denota composición de funciones entonces $(X^X, \circ)$ es un semigrupo. El grupo de unidades $\mathbb{S}(X) := U(X^X, \circ)$, consistente de las funciones $X \to X$ biyectivas, se denomina grupo simétrico de X.

   Sea $(X, *)$ un monoide. Verificar que el conjunto $\mathrm{End}(X, *)$ de endomorfismos de monoide es un sub-semigrupo de X^X. El conjunto $\mathrm{Aut}(X, *) = U(\mathrm{End}(X, *)) = \mathrm{End}(X, *) \cap \mathbb{S}(X)$ de automorfismos de monoide, es un subgrupo de $\mathbb{S}(X)$.

6) Dibujar algunos sub-semigrupos de $(\mathbb{R}^n, +)$, $(n = 1, 2, 3)$. Se sugiere considerar conos convexos $C \subset \mathbb{R}^n$. Intersecando con sub-semigrupos discretos como $\mathbb{N}^n$ o $\mathbb{Z}^n$ se obtienen ejemplos discretos.

7) Sea A el semigrupo $(\mathbb{N} - \{0\}, .)$ y $B = (\mathbb{N}, +)$. Demostrar que existe un isomorfismo de semigrupos $A \cong B^{(\mathbb{N})}$.

   Sugerencia: usar la descomposición de un numero natural como producto de factores primos.

8) a) Sea X un conjunto y $P(X)$ el conjunto de partes de X. Verificar que $(P(X), \cup)$ y $(P(X), \cap)$ son semigrupos y que $c : (P(X), \cup) \to (P(X), \cap)$ definido por $c(Y) = X - Y$ es un isomorfismo de semigrupos. Determinar los grupos de unidades de estos semigrupos.

   b) Sea $Y \subset X$ un subconjunto. Verificar que $(P(Y), \cap)$ es un submonoide de $(P(X), \cap)$, pero no es un sub-semigrupo (a menos que $Y = X$).

9) El grupo simétrico $\mathbb{S}_3 := \mathbb{S}(\{1, 2, 3\})$ es no conmutativo y posee exactamente 6 subgrupos, de los cuales 3 son normales.

10) a) Probar que todo grupo de orden ≤ 5 es abeliano. Describir las posibles estructuras.

   b) Existen dos grupos de orden 4 no isomorfos.

11) Sea G un grupo cíclico. Demostrar que G es abeliano y que todo subgrupo de G tambien es cíclico.

12) Sea G un grupo. Para $x, y \in G$, el elemento $[x, y] := x.y.x^{-1}.y^{-1} = (x.y).(y.x)^{-1}$ se llama conmutador de (x, y). Denotamos $[G, G] \subset G$ el subgrupo generado por todos los conmutadores. Verificar que $[G, G]$ es un subgrupo normal y que $G/[G, G]$ es abeliano. Demostrar que todo morfismo de G en un grupo abeliano se factoriza unívocamente a través de $G/[G, G]$.

13) a) Sea G un grupo. Se define el centro de G como $Z(G) = \{g \in G / g.x = x.g \ \ \forall x \in G\}$. Verificar que $Z(G)$ es un subgrupo normal de G.

   b) Determinar el centro del grupo $GL(n, K)$ de matrices inversibles de $n \times n$ sobre el cuerpo K, del grupo de matrices inversibles triangulares superiores $T(n, K)$ y del grupo simétrico $\mathbb{S}_n$.

14) Sea G un grupo y $\mathrm{Aut}(G)$ el grupo de automorfismos de G (ver ejercicio 5). Para cada $g \in G$ se define la conjugación por g, $c_g : G \to G$, como $c_g(x) = g.x.g^{-1}$. Verificar que:

   a) $c_g \in \mathrm{Aut}(G)$ (un automorfismo de la forma c_g de denomina automorfismo interior)

   b) la aplicación $c : G \to \mathrm{Aut}(G)$ tal que $c(g) = c_g$ es un morfismo de grupos.

   c) $\ker(c) = Z(G)$. Deducir que el grupo de automorfismos interiores es isomorfo a $G/Z(G)$.

   d) si $g \in G$ y $\varphi \in \mathrm{Aut}(G)$ entonces $\varphi \circ c_g \circ \varphi^{-1} = c_{\varphi(g)}$. Deducir que $\mathrm{im}(c)$ es un subgrupo normal de $\mathrm{Aut}(G)$. El grupo $\mathrm{Aut}(G)/\mathrm{im}(c)$ de "automorfismos exteriores" es un interesante invariante de G.

   Comentario: a veces se utiliza la notación $g^{-1}.x.g = x^g$, de manera que a) se escribe $(x.y)^g = x^g.y^g$, mientras que b) dice $(x^g)^h = x^{g.h}$.

15) Sea G un grupo y $K \subset H$ subgrupos de G. Si K es normal en H y H es normal en G, ¿es cierto que K es normal en G?

16) Si H y K son subgrupos propios de un grupo G entonces $H \cup K \neq G$. ¿Es válido lo mismo para tres subgrupos propios?

17) Dar contraejemplos a la siguiente afirmación: "Si H y K son subgrupos de G entonces $H.K$ es un subgrupo de G". Probar que $H.K$ es un subgrupo si y sólo si, $H.K = K.H$ (Definición: $H.K = \{h.k/h \in H, k \in K\}$).

18) Sea G un grupo finito con $|G| = n$ elementos. Se sabe (teorema de Lagrange) que si H es un subgrupo de G entonces $|H|$ es un divisor de n. ¿Vale la recíproca? Es decir, si m es un divisor de n, ¿existe un subgrupo $H \subset G$ tal que $|H| = m$? Demostrar que la respuesta es afirmativa si G es cíclico, pero negativa en general.

19) Si H y K son subgrupos normales de G entonces existe un monomorfismo (natural)

$$f : G/(H \cap K) \to G/H \times G/K$$

Considerar tambien el caso de tres o mas subgrupos.

20) Si H es un subgrupo de G de índice 2 entonces H es normal.

21) Sea $O(n, \mathbb{R})$ el grupo de transformaciones lineales $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ que preservan distancia (una tal transformación corresponde a una matriz $A \in GL(n, \mathbb{R})$ tal que $A.A^t = I$). Para cada subconjunto $P \subset \mathbb{R}^n$ definimos los grupos $O(P) = \{A \in O(n, \mathbb{R})/A(P) = P\}$ y $SO(P) = \{A \in O(n, \mathbb{R})/A(P) = P, \text{ y } \det(P) = 1\}$.

Sea $P \subset \mathbb{R}^3$ un tetrahedro regular. Demostrar que $O(P)$ es isomorfo al grupo simétrico $\mathbb{S}_4$ y que $SO(P)$ es isomorfo al grupo alternado $\mathbb{A}_4$.

Sugerencia: Ver [O], pag. 7, y considerar la acción de $O(P)$ sobre los vértices de P.

22) Sea H un subgrupo normal de G. Para que G sea isomorfo a $H \times G/H$ es necesario y suficiente que el morfismo de inclusión $H \to G$ sea una sección.

23) Sea G un grupo. Decidir cuáles de las siguientes propiedades son verdaderas y cuáles falsas. Justificar.

a) $a^n.b^n = (a.b)^n, \ n \in \mathbb{N}$
b) $(a.b.a^{-1})^n = a.b^n.a^{-1}$
c) Si $a^2 = e$ y $b^2 = e$ entonces $(a.b)^2 = e$.

24) Probar que un grupo de orden 30 tiene a lo sumo 7 subgrupos de orden 5.

25) Si G es un grupo tal que $g^2 = e$ para todo $g \in G$ entonces G es conmutativo.

26) Probar que:

a) Si H es un subgrupo de $\mathbb{Z}$ entonces existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $H = n\mathbb{Z}$.
b) Si H es un subgrupo discreto de $\mathbb{R}$ entonces existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $H = x\mathbb{Z}$.
c) Si H es un subgrupo finito de $\mathbb{C}^*$ entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $H = G_n$ (raices n-ésimas de 1).

27) Calcular $[G, G]$ (Ej. 12) en los siguientes casos:

a) $G = SL(2, \mathbb{R})$

b) $G = GL(2, \mathbb{R})$

c) $G = D_n$ (grupo dihedral).

d) $G = \mathbb{S}_n$

28) Si G es un conjunto y K un grupo sea K^G el conjunto de funciones $G \to K$ con estructura de grupo dada por $(\alpha * \beta)(g) = \alpha(g).\beta(g),\ g \in G$. Si G es tambien un grupo, sea $\mathrm{Hom}(G, K) \subset K^G$ el conjunto de morfismos de grupo. Verificar que si K es conmutativo entonces $\mathrm{Hom}(G, K)$ es estable, y por lo tanto hereda un estructura de grupo. Calcular:

a) $\mathrm{Hom}(D_n, \mathbb{Z})$

b) $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, D_n)$

c) $\mathrm{Hom}(D_3, D_3)$

d) $\mathrm{Hom}(\mathbb{Q}, \mathbb{Z})$

e) $\mathrm{Hom}(\mathbb{S}_n, G_2) = \{1, \mathrm{sg}\}$

f) $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_m)$

g) $\mathrm{Hom}(G, K) = \{1\}$, donde G y K son grupos finitos cuyos órdenes son coprimos.

h) $\mathrm{Hom}(\mathbb{S}_n, \mathbb{S}_m)$ (?)

29) *Grupo simétrico.*

a) Sea $\sigma = (1, 2, \ldots, n) \in \mathbb{S}_n$ un n-ciclo. Verificar que $\tau.\sigma.\tau^{-1} = (\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n)$ para cualquier $\tau \in \mathbb{S}_n$. Deducir que la clase de conjugación de σ tiene $(n-1)!$ elementos, y que el centralizador de σ es el grupo cíclico generado por σ.

b) Para $\alpha \in \mathbb{S}_n$ consideremos la descomposición $\alpha = \prod_{i=1}^{a} \alpha_i$ como producto de ciclos disjuntos, escrita de manera que las longitudes (=órdenes) $|\alpha_i|$ verifican $|\alpha_i| \leq |\alpha_{i+1}|$. Decimos entonces que $(a; |\alpha_1|, |\alpha_2|, \ldots, |\alpha_a|)$ es el tipo de descomposición de α. Demostrar que $\alpha, \beta \in \mathbb{S}_n$ son conjugados si y sólo si tienen el mismo tipo de descomposición.

c) $\mathbb{S}_n$ es generado por las trasposiciones $(12), (13), \ldots, (1n)$.

d) $\mathbb{S}_n$ es generado por las trasposiciones $(12), (23), \ldots, (n-1\ n)$.

e) $\mathbb{S}_n$ es generado por $\{(12), (1, 2, \ldots, n)\}$ (o por $\{\tau, \sigma\}$ donde τ es una trasposición y σ un n-ciclo).

f) $\mathbb{A}_n$ es generado por 3-ciclos.

30) Sea G un grupo y $\alpha : G \times X \to X$ una acción de G sobre un conjunto X. Se dice que α es transitiva si $\forall x, y \in X, \exists g \in G / y = g.x$ (o sea, hay una sola órbita de G en X). Para $n \in \mathbb{N}$, se dice que α es n-transitiva si la acción sobre X^n definida por $g.(x_1, \ldots, x_n) = (g.x_1, \ldots, g.x_n)$, es transitiva. Verificar que

a) La acción natural de $\mathbb{S}_n$ sobre $X = \{1, 2, \ldots, n\}$ es n-transitiva, mientras que la acción de $\mathbb{A}_n$ es $(n-2)$-transitiva.

b) Sea V un espacio vectorial de dimension n sobre un cuerpo K. Describir las órbitas de las acciones de $GL(V)$ sobre V y sobre $V \times V$.

c) *Equivalencia de matrices.* Consideremos la acción de $GL(n, \mathbb{R}) \times GL(m, \mathbb{R})$ sobre el conjunto de matrices $M(n \times m, \mathbb{R})$ reales de $n \times m$, definida por $(P, Q)(A) = P.A.Q^{-1}$. Describir las órbitas de esta acción.

Sugerencia: considerar el rango de A.

d) *Semejanza de matrices.* Se tiene también la acción de $GL(n, \mathbb{C})$ sobre $M(n \times n, \mathbb{C})$ definida por $P(A) = P.A.P^{-1}$. Describir las órbitas.

Sugerencia: considerar la forma de Jordan de A.

31) ¿Es $\mathbb{S}_3$ producto directo de subgrupos propios?

32) Un grupo cíclico de orden $r.s$ es isomorfo al producto de subgrupos cíclicos de órdenes r y s si y sólo si r y s son coprimos.

33) Sea G un grupo de orden $n = a.b$ $(a, b \in \mathbb{N})$. Supongamos que existen subgrupos $H \subset G$ y $K \subset G$ de órdenes a y b respéctivamente. Demostrar que si $H \cap K = \{1\}$ entonces $H.K = G$. ¿Es G isomorfo al producto $H \times K$?