Álgebra II

Primer Cuatrimestre 2005

Práctica 2

1) *Grupo asociado a un semigrupo conmutativo.*

   Sea $(N, +)$ un semigrupo conmutativo. En el grupo producto $N \times N$ definimos la relación $(x, y)R(x', y')$ si existe $z \in N$ tal que $z + x + y' = z + x' + y$. Verificar que R es una relación de equivalencia compatible con la operación de grupo. Verificar que la operación cociente define una estructura de grupo en el conjunto cociente $N \times N/R$. Este grupo será denotado $G(N)$. La aplicación $j : N \to G(N)$ tal que $j(n) =$ clase de $(n, 0)$ es un morfismo de semigrupos; j es inyectiva si y sólo si en N vale la ley cancelativa ($x + z = y + z$ implica $x = y$). Deducir que en un semigrupo conmutativo vale la ley cancelativa si y sólo si el semigrupo se puede inyectar en un grupo. Se define $\mathbb{Z} = G(\mathbb{N})$.

2) *Cuerpo de fracciones de un dominio.*

   Sea A un dominio (=anillo conmutativo sin divisores de cero). En $A \times A - \{0\}$ definimos la relación $(x, y)R(x', y')$ si $x.y' = x'.y$. Verificar que R es una relación de equivalencia. La clase de (x, y) se denota x/y. Definimos operaciones en $A \times A - \{0\}$: $(x, y).(x', y') = (x.x', y.y')$ y $(x, y) + (x', y') = (x.y' + x'.y, y.y')$. Verificar que estas operaciones son compatibles con R y definen en el conjunto cociente una estructura de anillo. Verificar que este anillo es un cuerpo, denotado $K(A)$. Se define $\mathbb{Q} = K(\mathbb{Z})$. Tambien se denota $A(t) = K(A[t])$ (cuerpo de funciones racionales en una variable) y $A((t)) = K(A[[t]])$.

3) *Construcción del cuerpo $\mathbb{R}$ de los números reales.*

   Consideremos el anillo producto $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$: un elemento de este anillo es una sucesión de numeros racionales, las operaciones de anillo son coordenada a coordenada.

   a) Probar que el subconjunto $C_a \subset \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ de la sucesiones de Cauchy, es un subanillo.
   b) Probar que el subconjunto $C_0 \subset C_a$ de la sucesiones que convergen a cero, es un ideal.
   c) Definimos $\mathbb{R} = C_a/C_0$ (anillo cociente). Verificar que $\mathbb{R}$ es un cuerpo.

   Nota: se demuestra que $\mathbb{R}$ es un cuerpo ordenado arquimediano completo, y que es el único cuerpo con estas propiedades.

4) Sea A un anillo conmutativo y $x \in A$ un elemento nilpotente (es decir, $x^n = 0$ para algun $n \in \mathbb{N}$). Probar que $1 + x$ es una unidad en A. Deducir que la suma de un elemento nilpotente y una unidad es una unidad.

5) a) $A[[x]]$ es de integridad sii $A[x]$ es de integridad, si y sólo A es de integridad.
   b) Un elemento $p = \sum_{i=0}^{n} p_i x^i \in A[x]$ es una unidad si y sólo si $p_0 \in A$ es una unidad y $p_1, \dots, p_n$ son nilpotentes.

c) Un elemento $p = \sum_{i=0}^{\infty} p_i x^i \in A[[x]]$ es una unidad si y sólo si $p_0 \in A$ es una unidad. Si p es nilpotente entonces p_i es nilpotente para todo i. ¿Vale la reciproca?

6) Describir los anillos:

a) $\mathbb{Z}[x]/(2, x)$

b) $\mathbb{Z}[x]/(2)$

c) $\mathbb{Z}[x]/(2x)$

d) $\mathbb{Z}[i]/(2)$ donde $\mathbb{Z}[i] = \{z = a+b.i/a, b \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C}$ es el anillo de enteros de Gauss.

e) $\mathbb{Z}/(6, 4)$

f) $\mathbb{Z}[x]/(x^2 + 1)$

g) $\mathbb{Z}[x]/(1 + x + x^2)$

h) $\mathbb{Z}[i]/(i)$

i) $\mathbb{Z}[i]/(1 + i)$

j) $\mathbb{Z}[i]/(2, 1 + i)$

k) $\mathbb{Z}[i]/(1 + i, 1 - 2i)$

l) $\mathbb{Z}[x]/(x^2)$ (álgebra de números duales)

7) Sea A un anillo y $(S, *)$ un semigrupo. En el conjunto A^S de todas las funciones $\alpha : S \to A$ definimos dos operaciones:

$$(\alpha + \beta)(s) = \alpha(s) + \beta(s)$$

$$(\alpha.\beta)(s) = \sum_{\{(u,v)\in S\times S/u*v=s\}} \alpha(u).\beta(v)$$

Suponemos que el semigrupo S es tal que el conjunto $\{(u, v) \in S \times S/u * v = s\}$ es finito para todo $s \in S$ (p. ej. $S \subset \mathbb{N}^k$, o S finito).

a) Verificar que $(A^S, +, .)$ es un anillo, que se denota $A[[S]]$. El anillo $A[[S]]$ es conmutativo si y sólo si A y S son conmutativos.

Notación: Es usual escribir un elemento $\alpha \in A^S$ como una suma formal $\sum_{s\in S} \alpha(s).s$. Explicitar las operaciones $+$ y $.$ utilizando esta convención.

b) Verificar que el subconjunto $A^{(S)} \subset A^S$ de funciones con soporte finito ($\alpha(s) = 0$ salvo a lo sumo finitos $s \in S$) es un subanillo, denotado $A[S]$ y llamado álgebra del semigrupo S con coeficientes en A.

c) Definir isomorfismos $A[[\mathbb{N}^r]] \cong A[[x_1, \ldots, x_r]]$ y $A[\mathbb{N}^r] \cong A[x_1, \ldots, x_r]$.

d) Verificar que si S es un grupo finito entonces la multiplicación en $A[S]$ se escribe $(\alpha.\beta)(s) = \sum_{t\in S} \alpha(s.t^{-1}).\beta(t)$ (producto de convolución).

8) Sea $\mathbb{H} = (\mathbb{R}^4, +, .)$ el álgebra de cuaterniones. Para $q = a + b.i + c.j + d.k \in \mathbb{H}$ sea $\bar{q} = a - b.i - c.j - d.k$ el cuaternión conjugado.

a) Verificar que $q.\bar{q} = \bar{q}.q = |q|^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$. Deducir que $q^{-1} = \bar{q}/|q|^2$ para $q \neq 0$ y que $\mathbb{H}$ es un anillo de división.

b) Exhibir subanillos de $\mathbb{H}$ isomorfos a $\mathbb{C}$.

c) $H = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ es un subgrupo de $(\mathbb{H} - \{0\}, .)$. Probar que todo subgrupo de H es normal. Deducir que H no es isomorfo al grupo dihedral D_4.

Se demuestra que H y D_4 son los únicos grupos no conmutativos de orden 8.

9) Si A es un anillo denotamos $GL(n, A)$ el grupo de matrices inversibles de $n \times n$ con coeficientes en A. Calcular el número de elementos de $GL(n, \mathbb{Z}_p)$ (p primo).

10) a) Sea A un anillo y $J \subset A$ un ideal a izquierda (resp. derecha, bilatero). Entonces $M(n, J) \subset M(n, A)$ es un ideal a izquierda (resp. derecha, bilatero).

Sea V un espacio vectorial de dimension n sobre un cuerpo K y consideremos el anillo $A = \mathrm{End}_K(V)$. Para cada subespacio lineal $U \subset V$ sea $I_U = \{f \in A / U \subset \ker(f)\}$ y $D_U = \{f \in A / \mathrm{im}(f) \subset U\}$.

b) Demostrar que I_U es un ideal a izquierda y D_U es un ideal a derecha.

c) Todo ideal a izquierda (resp. derecha) de A es igual a I_U (resp. D_U) para algún subespacio U.

d) A tiene exactamente dos ideales biláteros.

11) Sea A un dominio finito. Probar que A es un anillo de división.

12) Sean I, J y K ideales de un anillo conmutativo A. Probar:

a) $I.J \subset I \cap J$. Dar ejemplos de igualdad y de desigualdad.

b) $(I + J).K = I.K + J.K$

c) $(I.J)^n = I^n.J^n$

13) En $\mathbb{Z}$

a) $< m > \cap < n > = < [m, n] >$ (mínimo común múltiplo)

b) $< m > + < n > = < (m, n) >$ (máximo común divisor)

c) $< m > . < n > = < m.n >$

d) $< n >$ es primo si y sólo si $< n >$ es maximal, si y sólo si n es primo .

14) Sea A un anillo conmutativo. Probar que un ideal $J \subset A$ es maximal si y sólo si A/J es un cuerpo. Equivalentemente, un anillo conmutativo es simple (tiene solo dos ideales) si y sólo si es un cuerpo. ¿Qué pasa si A no es conmutativo? (considerar $M(n, K)$).

15) Se dice que un grupo G es simple si los únicos subgrupos normales de G son $\{1\}$ y G. Demostrar que si G es simple y conmutativo entonces es cíclico de orden primo. Otro ejemplo de grupo simple es $\mathbb{A}_n$ con $n \geq 5$ (demostración en [O]).

16) Sea $A = C^0((0, 1), \mathbb{R})$ el anillo de funciones continuas del intervalo $(0, 1) \subset \mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. Probar que $f \in A$ es un divisor de cero si y slo si $\{x / f(x) = 0\}$ contiene un abierto.

Opcional: Si $U \subset \mathbb{C}$ es un abierto, sea A_U el anillo de funciones holomorfas $U \to \mathbb{C}$. Probar que si U es conexo entonces A_U es un dominio de integridad.

17) a) Un elemento de $\mathbb{Z}_n$ es inversible si y sólo si no es divisor de cero.

b) $\mathbb{Z}_n$ es un cuerpo si y sólo si es dominio de integridad.

c) $\mathbb{Z}_n$ es un cuerpo si y sólo si n es primo.

d) Hay correspondencia biyectiva antiordenada entre el conjunto de ideales de $\mathbb{Z}_n$ (ordenados por inclusión) y el conjunto de divisores de n (ordenados por la relación de divisibilidad).

e) Calcular el numero de ideales maximales de $\mathbb{Z}_n$ (en función del numero de primos positivos que dividen n).

f) Un ideal de $\mathbb{Z}_n$ es primo si y sólo si es maximal.

g) Caracterizar los elementos nilpotentes (o sea $x^m = 0$) y los elementos idempotentes (o sea $x^2 = x$) de $\mathbb{Z}_n$.

18) Analizar la existencia de un isomorfismo de anillos:

a) $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Z}[x]$

b) $\mathbb{Z}[\pi] \subset \mathbb{R}$ ($\pi = 3,1416\ldots$) y $\mathbb{Z}[x]$.

c) $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ y $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$.

d) $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$.

e) $\mathbb{H}$ y $M(2,\mathbb{R})$ (para mas información ver [J]).

f) $A[x][y]$ y $A[x,y]$.

g) dos de $A[[x]][y]$, $A[y][[x]]$ y $A[[x,y]]$.

h) $\mathbb{R}[x,y]/(x^2+y^2-1)$ y $\mathbb{R}[\cos,\mathrm{sen}] \subset \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ ($\mathbb{R}$-subálgebra generada por $\{\cos,\mathrm{sen}\}$).

i) $K(\mathbb{R}[x,y]/(x^2+y^2-1)) \cong \mathbb{R}(t)$
Sugerencia: considerar una proyección estereografica.

j) $\mathbb{R}[x,y]/(x^2-y^2-1)$ y $\mathbb{R}[t]$

k) $\mathbb{R}[x,y]/(x^3+y^3-1)$ y $\mathbb{R}[t]$