Álgebra II

Primer Cuatrimestre 2005

Práctica 3 (Continuación)

24) Sea A un anillo y M un A-módulo. M se dice localmente cíclico si todo submódulo de M de tipo finito es cíclico.

a) Si M es localmente cíclico, todo submódulo de M es localmente cíclico.

b) Sea $f : M \to N$ un epimorfismo de A-módulos. Si M es localmente cíclico entonces también lo es N.

c) Si A es un dominio de ideales principales y K es el cuerpo de fracciones de A entonces K y K/A son A-módulos localmente cíclicos.

d) $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ son grupos abelianos localmente cíclicos, pero no son de tipo finito.

25) Sea G un grupo abeliano y $p \in \mathbb{N}$ un número primo. Se dice que G es un grupo p-cuasicíclico (o un grupo tipo p^∞) si todo subgrupo propio de G es cíclico de orden una potencia de p y G es infinito.

a) G es p-cuasicíclico si y sólo si existe una familia de subgrupos $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de G tal que:

i) G_n es un grupo cíclico de orden p^n.

ii) $G_n \subset G_{n+1}$ para todo n.

iii) $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} G_n = G$.

b) G es p-cuasicíclico si y sólo si admite un sistema de generadores $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que:

i) $g_1 \neq 0$ y $p.g_1 = 0$.

ii) $p.g_{n+1} = g_n$ para todo $n \geq 1$.

c) Unicidad: dos grupos p-cuasicíclicos son isomorfos.

d) Existencia: sea $S_p \subset \mathbb{Q}$ el subgrupo definido por $S_p = \{m/p^n,\ m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}\}$. El grupo cociente $\mathbb{Z}_{p^\infty} = S_p/\mathbb{Z}$ es p-cuasicíclico.

e) Todo homomorfismo no nulo entre grupos p-cuasicíclicos es un epimorfismo.

f) Un grupo p-cuasicíclico es localmente cíclico.

g) $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_{p^n}, \mathbb{Z}_{p^\infty}) \cong \mathbb{Z}_{p^n}$.

h) $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_{q^\infty}, \mathbb{Z}_{p^\infty}) = 0$, $(p \neq q)$.

26) Probar que los grupos siguientes no son finitamente generados:

$\mathbb{Q}^*$, $\mathbb{R}^*$, $\mathbb{C}^*$, $\S^1$, $\mathbb{Q}_{>0}$, $\mathbb{R}_{>0}$.

27) a) Encontrar sistemas de generadores (lo más chicos posibles) de los grupos:
$\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}^*$, $(\mathbb{Q}^*)^2$, $\mathbb{Z}_{(p)} = \{a/b \in \mathbb{Q}/\ p \text{ no divide } b\}$ (p primo).

b) Encontrar sistemas de generadores (lo más chicos posibles) de $K[x]/<f>$ (K cuerpo, $f \in K[x]$) como A-módulo, para $A = K$, $A = K[x]$ y $A = K[x]/<f>$.

28) a) Probar que $\mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z}_{mn}$ sii $(m : n) = 1$.

b) Encontrar los sumandos directos de $\mathbb{Z}_n$; determinar en cada caso un suplemento.

c) Determinar los submódulos cíclicos $< (a, b) >$ de $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ que son sumandos directos.

29) Establecer isomorfismos de grupos:

a) $\mathbb{R} \cong \mathbb{R}_{>0}$.

b) $\mathbb{C} \cong \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$.

c) $\mathbb{C}^* \cong \S^1 \oplus \mathbb{R}_{>0}$.

d) $\mathbb{R}^* \cong G_2 \oplus \mathbb{R}_{>0}$.

e) $\mathbb{Q}^* \cong G_2 \oplus \mathbb{Q}_{>0} \cong G_2 \oplus \mathbb{Z}^{(\mathbb{N})}$.

30) Probar que no existen epimorfismos de grupo en los siguientes casos:

a) $\mathbb{Z}_{p^\infty} \longrightarrow \mathbb{Z}_{p^\infty} \oplus \mathbb{Z}_{p^\infty}$

b) $\mathbb{Z}_{n^2} \longrightarrow \mathbb{Z}_n \oplus \mathbb{Z}_n$

c) $\mathbb{Q} \to \mathbb{Z}_{p^\infty} \oplus \mathbb{Z}_{p^\infty}$

d) $\mathbb{C}^* \to G_n$

31) Sea M un A-módulo. Se llama anulador del subconjunto $S \subset M$ a $\mathrm{An}(S) = \{a \in A : \ a.s = 0 \ \forall s \in S\}$. Si $x \in M$, $\mathrm{An}(\{x\})$ será notado $\mathrm{An}(x)$.

M se dice un A-módulo fiel si $\mathrm{An}(M) = 0$.

a) $\mathrm{An}(S)$ es un ideal a izquierda de A.

b) $\mathrm{An}(S) = A$ sii $S \subset \{0\}$.

c) $\mathrm{An}(\bigcup_{j\in J} S_j) = \bigcap_{j\in J} \mathrm{An}(S_j)$.

d) $\mathrm{An}(S) = \bigcap_{s\in S} \mathrm{An}(s)$.

e) Si $S \subset T$ entonces $\mathrm{An}(T) \subset \mathrm{An}(S)$.

f) Si $S \subset M$ es A-estable entonces $\mathrm{An}(S)$ es un ideal bilátero de A.

g) $M(n \times n, A)$ es un A-módulo fiel. Exhibir otros ejemplos de módulo fiel.

h) $\mathrm{An}(M^J) = \mathrm{An}(M^{(J)}) = \mathrm{An}(M)$ si $J \neq \emptyset$.

32) Sea M un A-módulo. Si $S \subset M$ es un subconjunto y $N \subset M$ es un submódulo, se llama transportador de S en N a $(N : S) = \{a \in A/a.s \in N, \forall s \in S\}$.

Si $x \in M$, $(N : \{x\})$ será indicado -por abuso de notación- $(N : x)$.

a) $(N : S)$ es un ideal a izquierda de A.

b) $(0 : S) = \mathrm{An}(S)$.

c) $(N : S) = A$ sii $S \subset N$.

d) $(N : \bigcup_{j\in J} S_j) = \bigcap_{j\in J}(N : S_j)$.

e) Si $S \subset T$ entonces $(N : T) \subset (N : S)$.

f) $(N^J : M^J) = (N^{(J)} : M^{(J)}) = (N : M)$ si $J \neq \emptyset$.

g) Si $S \subset M$ es A-estable entonces $(N : S)$ es un ideal bilátero de A.

h) $(\bigcap_{j \in J} N_j : S) = \bigcap_{j \in J}(N_j : S)$.

i) si $N \subset P$ entonces $(N : S) \subset (P : S)$.

j) $(N : x).x = N \cap A.x$.

k) Si A es conmutativo y I , J son ideales de A, existe un isomorfismo natural de A-módulos $(I : J)/I \cong \mathrm{Hom}_A(A/J, A/I)$.

33) Sea $f : M \to N$ un morfismo de A-módulos. Probar:

a) f es sección lineal sii f es inyectiva e $\mathrm{im}(f)$ es un sumando directo de N.

b) f es retracción lineal sii f es sobreyectiva y $\ker(f)$ es un sumando directo de M.

34) Probar que los siguientes grupos son indescomponibles: $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}_{p^\infty}$, $\mathbb{Z}_{p^n}$.

35) a) Sea A un anillo, M un A-módulo y $J \subset A$ un ideal bilatero tal que $J.M = \{0\}$ (es decir, J esta contenido en el anulador de M). Probar que M posee una única estructura de A/J-módulo tal que es conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd} A \times M \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\pi \times id"'] & M \\ A/J \times M \arrow[ur, "\overline{\mu}"'] & \end{tikzcd}$$

b) Si M y N estan en las condiciones de a), probar que

$$\mathrm{Hom}_A(M, N) = \mathrm{Hom}_{A/J}(M, N)$$

Calcular $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_{12}}(\mathbb{Z}_6, \mathbb{Z}_4)$