

# Álgebra II

PRIMER CUATRIMESTRE 2005

## PRÁCTICA 4

- 1) a) Calcular la torsión de los grupos abelianos  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{C}/\mathbb{Z}$  y  $\mathbb{C}/\mathbb{Q}$ .
  - b) Todo módulo finito sobre un anillo infinito, es de torsión. En particular, los grupos finitos son de torsión.
  - c) Un  $A$ -módulo  $M$  se dice acotado si existe  $a \in A$  tal que  $a \neq 0$  y  $a.M = 0$ . Si  $M$  es acotado entonces  $M$  es de torsión. Si  $A$  es conmutativo y  $M$  es un módulo finito de torsión entonces  $M$  es acotado. En particular, los grupos finitos son acotados.
  - d) Los grupos cuasicíclicos son de torsión y no acotados.
  - e) Sea  $A$  un dominio íntegro y sea  $K$  su cuerpo de fracciones. Si  $S$  es un  $A$ -submódulo de  $K$  tal que  $1 \in S$  entonces  $S/A$  es un  $A$ -módulo de torsión. En particular,  $K/A$  es de torsión.  $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$  es un grupo de torsión.
  - f) Si  $S$  es un subgrupo no nulo de  $\mathbb{Q}$  entonces  $\mathbb{Q}/S$  es un grupo de torsión.
  - g) Si  $J \subset A$  es un ideal a izquierda,  $A/J$  es de torsión si y sólo si para todo  $a \in A$  existe  $b \in A$  tal que  $b \neq 0$  y  $b.a \in J$ . En particular, si  $J$  es un ideal bilátero no nulo,  $A/J$  es de torsión.
  - h)  $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$  son sin torsión, ya sea como grupos abelianos o como módulos sobre los precedentes.
  - i) Sea  $A$  un anillo. El grupo abeliano  $(A, +)$  es de torsión si y sólo si es acotado.
  - j) Sea  $A$  un anillo y  $B = M(n \times n, A)$ . Considerando  $B$  como  $B$ -módulo a izquierda, existen elementos de torsión  $b_i \in B, i = 1, \dots, n$  tales que  $\sum_{i=1}^n b_i = 1$ , que no es de torsión en general.
- 2) a)  $\mathbb{Z}$  es un grupo reducido.  
(*Definición:* un módulo es reducido si no admite submódulos divisibles no nulos).
  - b)  $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$  son divisibles, ya sea como grupos abelianos o como módulos sobre los anteriores.
  - c) los grupos cuasicíclicos son divisibles.
  - d) los espacios vectoriales son divisibles.
  - e) son equivalentes:
    - I)  $A$  es un anillo de división.
    - II)  $A$  es divisible como  $A$ -módulo a izquierda.
    - III)  $A$  es divisible como  $A$ -módulo a derecha.
  - f) Sea  $A$  un dominio íntegro y  $K$  su cuerpo de fracciones. Si  $V$  es un  $K$ -espacio vectorial entonces  $V$  es un  $A$ -módulo divisible.
- 3) Si un grupo de torsión es de tipo finito entonces es finito.

- 4) Sea  $M$  un  $A$ -módulo.
- Si  $I$  es un conjunto filtrante no vacío y  $(S_i)_{i \in I}$  es una familia monótona de submódulos divisibles de  $M$  entonces  $S = \bigcup_{i \in I} S_i$  es un submódulo divisible de  $M$ .
  - $M$  admite submódulos divisibles maximales.
- 5) Sea  $A$  un anillo conmutativo; sean  $M$  y  $N$  módulos sobre  $A$ .
- Si  $M$  es divisible,  $\text{Hom}_A(M, N)$  es sin torsión.
  - Si  $N$  es sin torsión,  $\text{Hom}_A(M, N)$  es sin torsión.
  - Si  $M$  es de torsión,  $\text{Hom}_A(M, N)$  es reducido.
  - Si  $N$  es reducido,  $\text{Hom}_A(M, N)$  es reducido.
  - Si  $M$  es divisible y  $N$  es reducido,  $\text{Hom}_A(M, N) = 0$ .
  - Si  $M$  es de torsión y  $N$  es sin torsión,  $\text{Hom}_A(M, N) = 0$ .
- 6) Sea  $A$  un dominio íntegro, sea  $K$  el cuerpo de fracciones de  $A$  y sea  $M$  un  $A$ -módulo.
- Si  $M$  es divisible y sin torsión entonces  $M$  admite una estructura de  $K$ -espacio vectorial que extiende la estructura de  $A$ -módulo. Probar el recíproco.
  - La aplicación  $\text{Hom}_A(K, M) \rightarrow d(M)$ ,  $f \mapsto f(1)$  es un morfismo de  $A$ -módulos. Si  $M$  es sin torsión esta aplicación es un isomorfismo.
  - Si  $M$  es sin torsión,  $M$  es reducido si y sólo si  $\text{Hom}_A(K, M) = 0$ .
- 7) Sea  $M$  un  $A$ -módulo. Un submódulo  $S \subset M$  se dice puro si  $S \cap a.M = a.S$  para todo  $a \in A$ .
- $S$  es puro si todo  $x \in S$  que es divisible en  $M$ , es divisible en  $S$ .
  - Si  $T$  es un submódulo puro de  $M$  y  $S$  es un submódulo puro de  $T$ ,  $S$  resulta un submódulo puro de  $M$ .
  - Si  $S$  es un submódulo divisible de  $M$ , entonces  $S$  es un submódulo puro de  $M$ .
  - Si  $S$  es un submódulo puro de  $M$  y  $M$  es divisible entonces  $S$  es divisible.
  - Si  $A$  es un dominio íntegro,  $t(M)$  es un submódulo puro de  $M$ .
  - Si  $S$  es un submódulo de  $M$  tal que  $M/S$  es sin torsión entonces  $S$  es un submódulo puro de  $M$ .
  - Si  $S$  es un submódulo puro de  $M$  y  $M$  es sin torsión entonces  $M/S$  es sin torsión.
  - Si  $(S_i)_{i \in I}$  es una familia de submódulos puros de  $M$  y  $M$  es sin torsión entonces  $\bigcap_{i \in I} S_i$  es un submódulo puro de  $M$ .
  - Si  $I$  es un conjunto filtrante no vacío y  $(S_i)_{i \in I}$  es una familia monótona de submódulos puros de  $M$  entonces  $\bigcup_{i \in I} S_i$  es un submódulo puro de  $M$ .
  - Si  $S$  es un subgrupo puro de un grupo abeliano  $G$ , dado  $z \in G/S$  existe  $x \in z$  tal que  $\text{ord}(x) = \text{ord}(z)$ .
- 8) Sea  $G$  un grupo abeliano. Son equivalentes:

- a)  $G$  es divisible.
- b)  $G$  no admite subgrupos maximales.
- c)  $G$  no admite sistemas de generadores minimales.
- d) Para toda inyección de  $G$  en un grupo abeliano  $H$ ,  $G$  es un sumando directo en  $H$ .
- e)  $G$  es inyectivo como  $\mathbb{Z}$ -módulo.

*Definición:* Sea  $A$  un anillo conmutativo. Un  $A$ -módulo  $M$  es inyectivo si cada vez que se tiene un submódulo  $S \subset N$  de un  $A$ -módulo  $N$  y un morfismo  $f : S \rightarrow M$ , existe un morfismo  $g : N \rightarrow M$  tal que  $g|_S = f$ . En otras palabras, la aplicación de restricción  $\text{Hom}_A(N, M) \rightarrow \text{Hom}_A(S, M)$  es sobreyectiva, para todo  $S \subset N$ .

¿Cuáles implicaciones valen reemplazando  $\mathbb{Z}$  por un anillo conmutativo  $A$ ?

- 9) Sea  $K$  un cuerpo y  $A = K[x, y, z, w] / \langle xy - zw \rangle$ . Si  $\pi : K[x, y, z, w] \rightarrow A$  denota la proyección canónica, probar que  $\pi(x), \pi(y), \pi(z), \pi(w)$  son elementos irreducibles no asociados. Deducir que  $A$  no es un dominio de factorización única.
- 10) Sea  $K$  un cuerpo y  $A = K[t^2, t^3] \subset K[t]$ .
  - a) Probar que el ideal  $\langle t^2, t^3 \rangle \subset A$  no es principal. En particular, un subanillo de un anillo principal no es necesariamente principal.
  - b) Verificar que los elementos  $a = t^2 \in A$  y  $b = t^3 \in A$  son irreducibles no asociados. Deducir de  $a^3 = b^2$  que  $A$  no es de factorización única.
- 11) Sea  $K$  un cuerpo y  $A = K[[t]]$ . Si  $a \in A$  es un elemento no nulo, escrito  $a = \sum_{i \geq r} a_i t^i$  con  $a_r \neq 0$ , denotamos  $r = \text{ord}(a)$ .
  - a) Probar que la aplicación  $\text{ord} : A - \{0\} \rightarrow \mathbb{N}$  define una estructura de anillo euclideo en  $A$ .
  - b) Por a),  $A$  es principal. Probar más precisamente que todo ideal de  $A$  es  $\langle t^n \rangle$  para algún  $n \in \mathbb{N}$ .
  - c) Por b),  $A$  es factorial. Probar más precisamente que  $t$  es el único elemento irreducible, salvo asociados. Todo elemento  $a \in A$  se factoriza unívocamente  $a = u \cdot t^r$  con  $u \in A^*$ .
  - d) ¿Es  $K[[x, y]]$  euclideo, principal o factorial?
- 12) a) Sea  $A$  el anillo de funciones continuas  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Probar que para todo  $f \in A$  existe  $g \in A$  tal que  $f = g^3$ . Deducir que  $A$  no posee elementos irreducibles y que existen elementos de  $A$  que no son representables como producto de irreducibles; en particular,  $A$  no es factorial. Deducir además, o probar directamente, que  $A$  no es noetheriano.
  - b) (Opcional) Sea  $A$  el anillo de funciones holomorfas  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ . Caracterizar las unidades y elementos irreducibles de  $A$ . Exhibir elementos de  $A$  no factorizables como producto (finito) de irreducibles. Probar que  $A$  no es noetheriano.

- 13) Sea  $A$  un anillo conmutativo y  $M$  un  $A$ -módulo. Si todo conjunto no vacío de submódulos finitamente generados de  $M$  tiene un elemento maximal entonces  $M$  es noetheriano.
- 14) Sea  $A$  un anillo conmutativo,  $M$  un  $A$ -módulo y  $N, N' \subset M$  submódulos.  
Si  $M/N$  y  $M/N'$  son noetherianos (resp. artinianos) entonces  $M/N \cap N'$  es noetheriano (resp. artiniano).
- 15) Sea  $A$  un anillo conmutativo y  $f : M \rightarrow N$  un morfismo de  $A$ -módulos. Denotamos  $K_n = \ker(f^n)$  e  $I_n = \text{im}(f^n)$ .
- Si  $K_1 = K_2$  entonces  $K_1 \cap I_1 = 0$ . Si  $I_1 = I_2$  entonces  $K_1 + I_1 = M$ .
  - Si  $M$  es noetheriano (resp. artiniano) existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $K_n \cap I_n = 0$  (resp.  $K_n + I_n = M$ ).
  - Si  $M$  es noetheriano (resp. artiniano) y  $f$  es monomorfismo (resp. epimorfismo) entonces  $f$  es isomorfismo.
- 16) Sea  $L$  un cuerpo,  $K$  un subcuerpo de  $L$  y  $f : L \rightarrow K$  un morfismo de anillos sobreyectivo. En el conjunto  $A = L \times L$  se definen operaciones  $(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$ ,  $(x, y) \cdot (x', y') = (x \cdot x', x \cdot y' + y \cdot f(x'))$ .
- $(A, +, \cdot)$  es un anillo.
  - El único ideal a izquierda no trivial de  $A$  es  $\{0\} \times L$ ; pero  $\{0\} \times S$  es un ideal a derecha para todo  $K$ -subespacio lineal  $S$  de  $L$ .
  - $A$  es un anillo artiniano a izquierda; pero no es artiniano ni noetheriano a derecha, si  $L$  tiene  $K$ -dimensión infinita.
- 17) a) Sea  $K$  un cuerpo y  $m, n \in \mathbb{N}$ . Probar que el anillo  $A = K[x_1, \dots, x_n] / \langle x_1, \dots, x_n \rangle^m$  es artiniano.  
(si  $J$  es un ideal,  $J^m$  denota el ideal generado por los productos de  $m$  elementos de  $J$ )  
Sugerencia: basta con ver que  $\dim_K(A) < \infty$ .
- b) Si  $J \subset K[x_1, \dots, x_n]$  es un ideal tal que  $\langle x_1, \dots, x_n \rangle^m \subset J$  para algun  $m$ , entonces  $K[x_1, \dots, x_n]/J$  es un anillo artiniano. Dar ejemplos de tales  $J$ .