

Álgebra II

PRIMER CUATRIMESTRE 2005

PRÁCTICA 5

- 1) a) Existen módulos libres con elementos no nulos que son linealmente dependientes.
- b) Si L es un A -módulo libre y $x \in L$ es un elemento no nulo, todo miembro del ideal anulador de x es divisor de cero. En particular, si A es íntegro entonces todo elemento no nulo de L es linealmente independiente.
- c) Existen módulos no libres tales que todo elemento no nulo es linealmente independiente (considerar el cuerpo de fracciones de A).
- d) Existen módulos libres que admiten submódulos no libres.
- e) Existen módulos libres que admiten submódulos libres que no son sumandos directos.
- f) Un grupo cuasícíclico no es libre como \mathbb{Z} -módulo.
- g) Todo módulo sobre un anillo de división es libre.
Sugerencia: utilizando el lema de Zorn, demostrar que existe un conjunto linealmente independiente maximal.

- 2) El grupo abeliano $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ no es libre.

(Hay una demostración en “Infinite abelian groups” por I. Kaplansky, pag. 48..)

Comentario: si K es un cuerpo, según el ejercicio 1) g) el K -módulo $K^{\mathbb{N}}$ es libre, aunque no parece ser fácil exhibir una base.

- 3) Sea A un anillo y M un A -módulo a izquierda.

- a) Sea $(M_i)_{i \in I}$ una familia de submódulos cíclicos no nulos de M tal que I es infinito y M es suma directa interna de los M_i . Probar que para todo sistema de generadores S de M resulta $\text{card}(S) \geq \text{card}(I)$.

(Si es necesario ver “Lectures in Abstract Algebra” por N. Jacobson, vol. II, pag. 241.)

- b) En las condiciones de a), si $(N_j)_{j \in J}$ es otra familia de submódulos cíclicos no nulos tal que M es suma directa interna de los N_j entonces $\text{card}(J) = \text{card}(I)$.
- c) Si M admite una base infinita B , para todo sistema de generadores S de M resulta $\text{card}(S) \geq \text{card}(B)$. Para toda otra base B' de M se verifica $\text{card}(B') = \text{card}(B)$; en particular, toda otra base B' de M es infinita.
- d) Existen módulos libres que admiten bases finitas no coordinables. Por ejemplo, sea M un A -módulo libre con base $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$, y sea B el anillo $\text{End}_A(M)$. Si $u, v \in B$ están definidos por

$u(x_{2i}) = x_i, \quad u(x_{2i+1}) = 0 \text{ y } v(x_{2i}) = 0, \quad v(x_{2i-1}) = x_i$ entonces $\{u, v\}$ es una base de B como B -módulo. Deducir que $B \cong B^2$ y que $B^n \cong B^m$ para todo $m, n \in \mathbb{N}$.

- 4) Sea D un anillo de división y V un D -módulo.
- (*Lema de agregado.*) Si $(x_i)_{i \in I}$ es una familia linealmente independiente de elementos de V y $x \in V$ no es combinación lineal de los x_i entonces la familia que se deduce de $(x_i)_{i \in I}$ agregando el elemento x , es linealmente independiente.
 - (*Lema de intercambio.*) Si $(x_i)_{i \in I}$ es una familia linealmente independiente de elementos de V y $(y_j)_{j \in J}$ es una familia de generadores de V , para todo $p \in I$ existe $j \in J$ tal que la familia que se deduce de $(x_i)_{i \in I}$ reemplazando x_p por y_j , es linealmente independiente.
 - Si V admite una base finita, toda otra base es finita y del mismo cardinal.
 - Si V es un espacio vectorial, dos bases cualesquiera de V son coordinables.
- 5) Se dice que un anillo A tiene noción de rango si para todo A -módulo libre L todas las bases de L tienen el mismo cardinal (en cuyo caso, ese cardinal se denomina rango de L). Por 3) c), basta con considerar L con base finita. Equivalentemente, A tiene noción de rango si, para $n, m \in \mathbb{N}$, $A^n \cong A^m$ implica $n = m$.
- Supongamos que el anillo B tiene noción de rango y que existe un morfismo de anillos $A \rightarrow B$. Entonces A tiene noción de rango.
 - Un anillo de división tiene noción de rango.
 - Un anillo conmutativo tiene noción de rango.
Sugerencia: utilizar la existencia de un ideal maximal.
 - El anillo de 3) d) no tiene noción de rango.
- 6) Sea $A = k[X, Y, Z]$ (k un cuerpo) y sea $(a, b, c) \in A^3$. Consideremos el submódulo $M \subset A^3$ definido por

$$M = \{(x, y, z) \in A^3 / ax + by + cz = 0\}$$

(submódulo definido por una ecuación lineal homogénea).

- Sea $(a, b, c) = (X, Y, Z)$. Exhibir dos elementos de M linealmente independientes. Exhibir un sistema de generadores de M minimal.
- Demostrar que M no es libre.
- Sea $K = k(X, Y, Z)$ el cuerpo de fracciones de A y sea

$$N = \{(x, y, z) \in K^3 / ax + by + cz = 0\}$$

Exhibir dos bases de N ; escribir la matriz de cambio de base.

- Considerar otras elecciones de $(a, b, c) \in A^3$. Dar ejemplos donde M es libre.

Investigar otros casos: $A = k[X_1, \dots, X_n]$, $M \subset A^m$ definido por un sistema de r ecuaciones.

- 7) Sea A un anillo conmutativo, $S \subset A$ un conjunto multiplicativo y $M \rightarrow N \rightarrow P$ una sucesión exacta de A -módulos. Demostrar que la sucesión $S^{-1}M \rightarrow S^{-1}N \rightarrow S^{-1}P$ también es exacta. Decimos entonces que el functor $F(M) = S^{-1}M$ de la categoría de A -módulos en la categoría de $S^{-1}A$ -módulos, es exacto.

- 8) Sea A un anillo conmutativo y $P \subset A$ un ideal primo. Denotamos A_P el anillo $S^{-1}A$ donde $S = A - P$. Si M es un A -módulo, denotamos M_P el A_P -módulo $S^{-1}M$.
- a) Probar que A_P tiene un único ideal maximal (se dice entonces que es un anillo local).
- b) Probar que son equivalentes:
- i) $M = 0$
 - ii) $M_P = 0$ para todo ideal primo $P \subset A$.
 - iii) $M_P = 0$ para todo ideal maximal $P \subset A$.
- c) Sea $f : M \rightarrow N$ un morfismo de A -módulos. Probar que $\ker(f)_P \equiv \ker(f_P)$ y $\operatorname{coker}(f)_P \equiv \operatorname{coker}(f_P)$ para todo ideal primo $P \subset A$ (usar el ejercicio 7).
- d) Probar que son equivalentes:
- i) f es inyectivo (resp. sobreyectivo)
 - ii) f_P es inyectivo (resp. sobreyectivo) para todo ideal primo $P \subset A$.
 - iii) f_P es inyectivo (resp. sobreyectivo) para todo ideal maximal $P \subset A$.
- Sugerencia: aplicar b) a $\ker(f)$ (resp. $\operatorname{coker}(f)$).
- e) Se dice que un A -módulo M es localmente libre si M_P es un A_P -módulo libre para todo primo P . Demostrar que un módulo libre es localmente libre (la recíproca es falsa, ver el ejercicio 6).