Álgebra II

PRIMER CUATRIMESTRE 2005

PRÁCTICA 6

1) Sea $0 \to M \to N \to P \to 0$ una sucesión exacta de A-módulos. Probar:

   a) Si N es de tipo finito, entonces P es de tipo finito.

   b) Si M y P son de tipo finito, entonces N es de tipo finito.

   c) N es noetheriano (artiniano) si y sólo si M y P son noetherianos (artinianos).

2) Sea para $m \in \mathbb{Z}$ la sucesión exacta de $\mathbb{Z}$-módulos

$$0 \to m\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \to 0.$$

   Aplicarle los funtores $\mathrm{Hom}(-, M)$ y $\mathrm{Hom}(M, -)$ para $M = \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_m, \mathbb{Z}_n$ (n coprimo con m) y estudiar la exactitud de las sucesiones que resultan.

3) Sea K un cuerpo y V un K-espacio vectorial. Probar que V es inyectivo y proyectivo.

4) Sea A dominio y M un A-módulo divisible sin torsión. Probar que M es inyectivo.

5) Sea A un dominio de ideales principales y M un A-módulo divisible, entonces M es inyectivo.

6) Sea $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ el anillo producto. Sea $M = \{(m, 0) : \ m \in \mathbb{Z}\}$. Probar que M es un A-módulo proyectivo, pero que no es libre.

7) Calcular los divisores elementales de los siguientes grupos abelianos:

   a) $\mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_6 \oplus \mathbb{Z}_9$.

   b) $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_8 \oplus \mathbb{Z}_{14}$.

   c) $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_{49} \oplus \mathbb{Z}$.

   d) $\mathbb{Z}_{12} \oplus \mathbb{Z}_{21} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_{20} \oplus \mathbb{Z}_9 \oplus \mathbb{Z}_7$.

   e) G un grupo abeliano de orden 36 que tiene exactamente 2 elementos de orden 3 y que no tiene elementos de orden 4.

   f) G un grupo abeliano de orden 225 que tiene por lo menos 40 elementos de orden 15 y tal que todo subgrupo de orden 9 es isomorfo a $\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3$.

8) Determinar los divisores elementales de los grupos abelianos definidos por generadores y relaciones siguientes:

   a) generadores $\{e_1, e_2\}$, relación $3e_1 = 4e_2$.

   b) generadores $\{e_1, e_2, e_3\}$, relaciones $2e_1 + 2e_2 + 2e_3 = 0$ y $3e_1 = 6e_3$.

   c) generadores $\{e_1, e_2, e_3\}$, relaciones $3e_1 = e_2$ y $e_2 = 3e_3$.

   d) generadores $\{e_1, e_2, e_3\}$, relaciones $2e_1 + 3e_2 = 0$ y $2e_1 + 4e_3 = 0$.

e) generadores $\{e_1, e_2, e_3\}$, relaciones $e_1 = 3e_2$ y $e_1 = 3e_3$.

f) generadores $\{e_1, e_2, e_3\}$, relaciones $3e_1 = -e_3$ y $3e_1 = 3e_3 - 8e_2$.

9) Determinar todas las clases de isomorfismo de grupos abelianos de ordenes 8, 16, 18, 100, 180 y 210 respectivamente.

10) Sea A un grupo abeliano de orden n.

a) Si r es un divisor de n entonces A posee subgrupos de orden r. Si r es primo entonces A posee elementos de orden r.

b) Si $a \in A$ posee orden maximal (entre los órdenes de elementos de A) entonces a genera un sumando directo de A.

c) Si n es libre de cuadrados entonces A es cíclico.

11) Sean A, B, C grupos abelianos de tipo finito.

a) $A \oplus A \cong B \oplus B$ implica $A \cong B$.

b) $A \oplus C \cong B \oplus C$ implica $A \cong B$.

c) Las afirmaciones análogas a a) y b) para módulos finitamente generados sobre anillos más generales que $\mathbb{Z}$ son falsas.

12) Determinar todas las clases de isomorfismo de módulos sobre $\mathbb{C}[t]$ que como espacio vectorial complejo tienen dimensión 2. Análogo problema para dimensiones 3 y 4.

Determinar todas las formas canónicas de Jordan de matrices complejas de $n \times n$ para $n = 2, 3$ y 4.

13) Hallar la forma normal racional y la forma normal de Jordan de un endomorfismo nilpotente.

14) Hallar la forma normal racional y la forma normal de Jordan de las siguientes matrices:

$$a) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \qquad b) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad c) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

15) Sea $J(\lambda, n) \in \mathbb{C}^{n \times n}$ un bloque de Jordan de autovalor λ. Calcular la forma normal racional de las matrices con forma normal de Jordan:

a) $J = \operatorname{diag}(J(-3,2), J(-3,2), J(-3,1), J(2,4), J(2,3), J(2,1))$.

b) $J = \operatorname{diag}(J(-1,3), J(0,2), J(0,2), J(1,2), J(1,1))$.

16) Sea $C(p)$ la matriz compañera del polinomio mónico $p(t) \in \mathbb{C}[t]$. Calcular la forma normal de Jordan de las matrices cuya forma normal racional es

a) $C = \operatorname{diag}(C((t+2)(t-2)), C((t+2)t^2(t-2)), C((t+2)^2t^2(t-2)^2))$.

b) $C = \operatorname{diag}(C(t+4)), C((t+4)^3(t+1)(t-2)^2), C((t+4)^4(t+1)(t-2)^2))$.

17) Encontrar las posibles formas normales racionales y las posibles formas normales de Jordan para una matriz $a \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tal que

a) $\mathcal{X}_a(t) = (t-2)^4(t-3)^2$, $m_a(t) = (t-2)^2(t-3)^2$.

b) $\mathcal{X}_a(t) = (t-3)^3(t-5)^6$, $m_a(t) = (t-3)^2(t-5)^3$.

18) Dar ejemplos de matrices $a, b \in M(n\times n, K)$ no semejantes, con el mismo polinomio minimal y el mismo polinomio característico.

(Def.: se dice que a y b son semejantes si existe $u \in M(n\times n, K)^*$ tal que $a = u.b.u^{-1}$; equivalentemente, los $K[t]$-módulos asociados K^n_a y K^n_b son isomorfos).

19) Sea A un dominio de ideales principales con cuerpo de fracciones K y sea M un A-módulo de tipo finito.

Denotamos $M^* = \mathrm{Hom}_A(M, A)$ y $M' = \mathrm{Hom}_A(M, K/A)$ (*-dual y '-dual de M).

a) M es de torsión sii $M^* = 0$ sii $M \cong M'$.

b) M es sin torsión sii M es libre sii $M \cong M^*$.

c) Dado un submódulo $S \subset M$ y $m \in M - S$, existe $\varphi \in M'$ tal que $\varphi(S) = 0$ y $\varphi(m) \neq 0$. En particular, $M' = 0$ sii $M = 0$.

d) Sean $\alpha : M \to M^{**}$ y $\beta : M \to M''$ los morfismos naturales. Entonces $\ker(\alpha) = \mathrm{t}(M)$ y $\ker(\beta) = 0$. Si M es libre entonces α es un isomorfismo. Si M es de torsión entonces β es un isomorfismo.