Álgebra II

Primer Cuatrimestre 2005

Práctica 7

1) Sea A un anillo conmutativo $K = K(A)$ su cuerpo de fracciones, y M, N A-módulos. Probar:

   a) Si M es un A-módulo divisible y N es un A-módulo de torsión entonces $M \otimes_A N = 0$.

   b) Si M es divisible (resp. de torsión) entonces $M \otimes_A N$ es divisible (resp. de torsión) para todo N.

   c) $K \otimes_A M \simeq M$.

   d) Si M es divisible, entonces $K \otimes_A M \simeq M/t(M)$. En particular, si M es divisible y sin torsión, entonces $K \otimes_A M \simeq M$.

2) Sea A un anillo conmutativo y M un A-módulo. Probar:

   a) Si I es un ideal de A, entonces
   $$A/I \otimes_A M \simeq M/IM.$$

   b) M es divisible si y sólo si $\forall x \in A$, $A/(x) \otimes_A M \simeq 0$.

   c) Si $I, J \subset A$ son ideales, entonces
   $$A/I \otimes_A A/J \simeq A/I + J.$$

3) Calcular

   a) $\mathbb{Z}_n \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_m$.

   b) $\mathbb{Z}_n \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$.

   c) $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$.

   d) $\mathbb{Z}_n \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_{p^\infty}$.

4) Sea G un grupo abeliano tal que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $G \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_{p^n} \neq 0$. Probar que $G \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_{p^m} \neq 0$ para todo $m \in \mathbb{N}$.

5) Probar que un grupo abeliano G es divisible si y sólo si $F \otimes_{\mathbb{Z}} G = 0$ para todo grupo abeliano finito F.

6) Sea A un anillo conmutativo, $S \subset A$ un conjunto multiplicativo y M un A-módulo. Demostrar que existe un isomorfismo de $S^{-1}A$-módulos, $S^{-1}M \equiv S^{-1}A \otimes_A M$.

7) a) Sea A un anillo conmutativo y sea T un A-módulo. Demostrar que para toda sucesión exacta $M \to N \to P \to 0$ de A-módulos, la sucesión de A-módulos $M \otimes_A T \to N \otimes_A T \to P \otimes_A T \to 0$ también es exacta. Decimos entonces que el functor $F_T(M) = M \otimes_A T$ de la categoría de A-módulos en si misma, es exacto a derecha.

b) Probar que F_T no es exacto en general. Considerar por ejemplo el morfismo $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ de multiplicación por $n \in \mathbb{Z}$ y tensorizar por $T = \mathbb{Z}_n$.

Definición: se dice que T es un A-módulo plano si F_T es exacto.

c) Generalizando el ejemplo de b), sea $f : A^n \to A^m$ un morfismo de A-módulos libres definido por la matriz $a \in M(m \times n, A)$. Si $J \subset A$ es un ideal, probar que el morfismo $f \otimes_A A/J : (A/J)^n \to (A/J)^m$ de A/J-módulos libres, está definido por la matriz $\bar{a} \in M(m \times n, A/J)$ obtenida de a reduciendo los coeficientes módulo J. En particular, si $a \in M(m \times n, J)$ entonces $f \otimes_A A/J = 0$. Explicitar los ejemplos $A = \mathbb{Z}$ y $A = k[x_1, \dots, x_r]$.

8) Sea A un anillo conmutativo y sean $f : A^r \to A^s$ y $g : A^m \to A^n$ morfismos definidos por matrices $\alpha \in M(s{\times}r, A)$ y $\beta \in M(n{\times}m, A)$. Denotamos $\alpha{\otimes}\beta \in M(s.n{\times}r.m, A)$ la matriz de $f \otimes g : A^r \otimes A^m \to A^s \otimes A^n$ en las bases canonicas $e_i \otimes e_j$ ordenadas lexicográficamente. Explicitar $\alpha \otimes \beta$, que se llama “producto de Kronecker de α y β”.

9) Probar que existen isomorfismos

a) $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cong \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ de $\mathbb{R}$-álgebras.

Sugerencia: buscar elementos idempotentes.

b) $A[t] \otimes_A A[t] \cong A[x, y]$ de A-álgebras, donde A es un anillo conmutativo.

10) Sea A un anillo conmutativo. Para cada A-módulo M denotemos $M^* = \mathrm{Hom}_A(M, A)$.

a) Existe un isomorfismo natural $(M \otimes_A N)^* \equiv \mathrm{Bil}_A(M \times N; A)$.

b) Existe un morfismo natural $\mu_{M,N} : M^* \otimes_A N^* \to (M \otimes_A N)^*$ tal que $\mu_{M,N}(\alpha \otimes \beta)(m \otimes n) = \alpha(m).\beta(n)$.

c) Probar que si M y N son libres de rango finito entonces $\mu_{M,N}$ es un isomorfismo.

11) Sea V un espacio vectorial de dimensión n sobre un cuerpo K y sea $\sigma : V \to V$ un morfismo K-lineal.

a) Sea $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base ordenada de V. Sea $\mathcal{C}$ el conjunto de las funciones crecientes $\lambda : \{1, \dots, k\} \to \{1, \dots, n\}$, y para $\lambda \in \mathcal{C}$ denotemos $v_\lambda = v_{\lambda(1)} \wedge \cdots \wedge v_{\lambda(k)}$, de manera que $\{v_\lambda\}_{\lambda \in \mathcal{C}}$ es una base de $\wedge^k(V)$. Describir la matriz de $\wedge^k(\sigma) : \wedge^k(V) \to \wedge^k(V)$ en esta base. (Probar que el elemento (λ_1, λ_2) de esta matriz es el determinante del menor (λ_1, λ_2) de la matriz de σ).

b) Probar la identidad en $K[t]$: $\det(t.\mathrm{id}_V + \sigma) = \sum_{j=0}^n \mathrm{tr}(\wedge^j(\sigma)).t^{n-j}$.