ECUACIÓN DE CLASES Y TEOREMAS DE SYLOW

1) *Definición.* Si G es un grupo de orden $p^b q$ con p primo y $(p:q)=1$, decimos que $H \subset G$ es un p-subgrupo de Sylow de G si $|H| = p^b$.

   Calcular todos los p-subgrupos de Sylow de $\mathbb{S}_3 \times \mathbb{Z}_3, \mathbb{S}_3 \times \mathbb{S}_3$ y D_n. (Se entiende: para cada p que divida el orden del grupo.)

2) Sea G un grupo no abeliano de orden 39. ¿Cuántos elementos de orden 3 y de orden 13 tiene G?. ¿Y si el grupo es abeliano?

3) Probar que no existen grupos simples de orden $30, 56, 200, 204, 2540$.

4) Probar que todo grupo de orden 455 es cíclico.

5) Si G es un grupo tal que $|G| = p^3$ y es no abeliano, entonces $Z(G) = [G, G]$.

   Sugerencia: Recordar que $p/|Z(G)|$.

6) Si $p > 2$ es un primo y G es tal que $|G| = 2p$ entonces G es abeliano o $G \simeq D_p$.

7) Si un grupo G es que $|G| = 2n$, tiene n elementos de orden 2, y los restantes forman un subgrupo H, entonces n es impar y H es normal en G. Deducir que G no es simple.

8) Probar que los únicos grupos no abelianos de orden 8 son $\mathbb{H}$ y D_4.

9) Sea p primo. Probar que el grupo de unidades de Z_{p^r} es cíclico, salvo el caso $p = 2$ y $r \geq 3$.

10) Sean $p, q > 2$ primos $p < q$, $p \not| (q-1)$. Entonces todo grupo de orden pq es cíclico.