2^{do} *cuatrimestre 2005*

Álgebra II

Adicionales (Grupos)

1. Sea p primo y $|G| = n$. Probar que

$$\exists\, k \text{ tal que } n = p^k \Leftrightarrow \forall x \in G\ o(x) = p^s \text{ para algun } s.$$

(s depende de x).

2. *a*) Sea G un grupo simple de orden 168. Calcular la cantidad de elementos de orden 7 que hay en G.

   b) Sea G un grupo no abeliano de orden 39. Calcular la cantidad de elementos de orden 3 y la cantidad de elementos de orden 13 que hay en G. ¿Y si G es abeliano?

   c) Sea G un grupo no abeliano de orden 21. Para todo p primo, calcular la cantidad de p-subgrupos de Sylow de G.

3. Sea G un grupo finito tal que para todo primo p existe un p-subgrupo de Sylow invariante en G. Probar que G es el producto de todos sus subgrupos de Sylow.

4. *a*) Probar que todo grupo de orden $17^2 \cdot 19^2$ es abeliano.

   b) Probar que todo grupo de orden 255 es cíclico.

   c) Probar que todo grupo de orden $5 \cdot 7 \cdot 17$ es cíclico.

5. Sea $G = SL_2(\mathbb{Z}_3)$.

   a) Encontrar todos los subgrupos de Sylow de G.

   b) Probar que G tiene un subgrupo invariante isomorfo a $\mathcal{H}$.

6. *a*) Sea p primo y sea G un grupo de orden p^3 con dos subgrupos normales distintos de orden p. Probar que G es abeliano y no cíclico.

   b) Sea G un grupo de orden $27 \cdot 5$. Probar que si G posee más de un subgrupo invariante de orden 3 entonces G es abeliano y no cíclico.

7. Sea p primo impar y $\alpha \in \mathbb{N}$. Probar que si G es un grupo no abeliano de orden $2p^\alpha$ que contiene un elemento de orden p^α entonces G es isomorfo a D_{p^α}.

8. Probar que hay exactamente 4 grupos no isomorfos de orden 30.

9. *Sea G un grupo de orden finito y sea K un subgrupo invariante de G y H otro subgrupo tal que $(|K|; |G:H|) = 1$. Probar que $K \subset H$.

Nota: En lo que queda de la práctica todos los grupos se suponen abelianos.

10. Sea

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & G' & \longrightarrow & G & \longrightarrow & G'' & \longrightarrow & 0 \\
 & & f' \downarrow & & f \downarrow & & & & \\
0 & \longrightarrow & H' & \longrightarrow & H & \longrightarrow & H'' & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

un diagrama conmutativo de grupos, con filas exactas. Probar que existe una única $f'' : G'' \longrightarrow H''$ que completa el diagrama conmutativo y que, si f y f' son isomorfismos, entonces f'' es un isomorfismo.

11. Completar el diagrama conmutativo de grupos abelianos NO NULOS de forma tal que las filas y columnas resulten exactas:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \mathbb{Z}_2 & \longrightarrow & \mathbb{Z}_4 & \longrightarrow & \mathbb{Z}_2 & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \mathbb{Z}_6 & \longrightarrow & & \longrightarrow & & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \mathbb{Z}_3 & \longrightarrow & & \longrightarrow & & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$