2^{do} cuatrimestre 2005

Álgebra II

Práctica 4

1. Probar que los siguientes conjuntos, con las operaciones definidas tienen estructura de anillo:

    a) $(A^{n\times n},+,\cdot)$ (matrices de $n\times n$, A anillo conmutativo).

    b) $\{f : A \longrightarrow A\}, A$ anillo; $(f+g)(a)=f(a)+g(a)$; $(f\cdot g)(a)=f(a)\cdot g(a)$

    c) $A_1\times\ldots\times A_n$; $A_1,\ldots,A_n$ anillos, suma y producto coordenada a coordenada

    d) $\{\mathcal{P}(X),\triangle,\cap\}$ con X conjunto

    e) $\mathbb{Z}[G]=\{\sum_{g\in G} a_g\cdot g \,/\, a_g\in\mathbb{Z}\}$ con $\sum a_g\cdot g+\sum b_g\cdot g=\sum(a_g+b_g)\cdot g$; $\sum a_g\cdot g\,.\,\sum a_h\cdot h=\sum a_g b_h gh$

    f) $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]=\{a+b\sqrt{d} \,:\, a,b\in\mathbb{Z}\}$ con $d\in\mathbb{Z}$, d libre de cuadrados.

    Decidir cuáles son conmutativos, cuáles son dominios íntegros, anillos de división, cuerpos.

2. Dar ejemplos de

    a) anillo de división que no sea cuerpo.

    b) anillo que no sea íntegro.

    c) anillo íntegro que no sea de división.

    d) dominio íntegro que no sea dominio principal.

3. ¿Existe algún producto $\cdot$ que haga de $(\mathbb{Z}_n,+,\cdot)$ un cuerpo? ($+$ es la suma usual)

4. Sea $A=\mathcal{C}[0,1]$ el anillo de funciones reales continuas definidas en $[0,1]$.

    a) ¿Hay divisores de cero en A?

    b) ¿Cuáles son los elementos inversibles en A?

5. Sea A un anillo con identidad 1

    a) Probar que $\mathcal{U}(A)=\{a\in A : a \text{ es inversible}\}$ es un grupo multiplicativo.

    b) Hallar $\mathcal{U}(\mathbb{Z}_m)$ para $m=3,4,5,6,8$.

    c) ¿Cuál es el orden de $\mathcal{U}(\mathbb{Z}_m)$?

    d) ¿Es $\mathcal{U}(\mathbb{Z}_8)\simeq\mathcal{U}(\mathbb{Z}_5)$?

6. Consideremos el anillo $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$

a) Probar que en $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ la escritura es única. Es decir que si $a+b\sqrt{3}=c+d\sqrt{3}$, entonces $a=c$ y $b=d$.

b) Sea $N:\mathbb{Z}[\sqrt{3}]\longrightarrow\mathbb{Z}$ la función (norma) definida por $N(a+b\sqrt{3})=a^2-3b^2$. Probar que es multiplicativa.

c) Probar que $2+\sqrt{3}$ es una unidad.

d) Probar que $z\in\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ es una unidad si, y sólo si, $N(z)=1$ ó $N(z)=-1$.

e) Hallar otras unidades de $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$.

7. Caracterizar el grupo de unidades de:

   $\mathbb{Z}$, $\mathbb{K}$ cuerpo, $\mathbb{Z}[i], \mathbb{Z}[\sqrt{-5}], B[X]$ con B dominio íntegro.

8. Sea D un dominio de integridad finito. Probar que D es un cuerpo.

9. Hallar todos los ideales primos de $\mathbb{Z}$.

10. Probar que si $\mathbb{K}$ es un cuerpo entonces $\mathbb{K}[X]$ es un dominio principal. ¿Es $\mathbb{Z}[X]$ un dominio principal?

11. Sea $f:A\longrightarrow B$ un morfismo de anillos. Probar que

    a) $\mathrm{im}(f)$ es un subanillo de B

    b) $\ker(f)$ es un ideal de A

    c) $A/\ker(f)\simeq\mathrm{im}(f)$ (como anillos)

12. Sea A un anillo. Probar que A es un anillo de división si, y sólo si, los únicos ideales a izquierda de A son 0 y A.

13. Sean A un anillo conmutativo e $\mathcal{I}$ un ideal de A. Probar que $\mathcal{I}$ es un ideal primo de A si y sólo si $A/\mathcal{I}$ es un dominio íntegro.

14. Probar que en un anillo conmutativo todo ideal maximal es primo.

15. Sea A un anillo conmutativo y sea $\mathcal{M}$ un ideal de A. Probar que $\mathcal{M}$ es maximal si y sólo si $A/\mathcal{M}$ es un cuerpo.

16. Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo y sea $f\in\mathbb{K}[X]$. Probar que $\mathbb{K}[X]/<f>$ es un cuerpo, si y sólo si, f es irreducible en $\mathbb{K}[X]$. ¿Sigue valiendo esto si se reemplaza el cuerpo $\mathbb{K}$ por un anillo conmutativo A?

17. Probar que $\mathbb{Z}[X]/<X^2+1>\simeq\mathbb{Z}[i]$

18. Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo. Probar que los únicos ideales biláteros de $M_2(\mathbb{K})$ son 0 y $M_2(\mathbb{K})$. ¿Es $M_2(\mathbb{K})$ un anillo de división?

19. Sea A un anillo. Probar que existe un subanillo $B \subset A$ tal que $B \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ para algún $n \in \mathbb{N}_0$.

20. Probar que $\mathbb{Z}[i]/ < 1 + i > \simeq \mathbb{Z}_2$ y caracterizar el anillo cociente $\mathbb{Z}[i]/ < 1 + 2i >$.

21. Probar que si $\mathcal{I}$ es un ideal primo de $\mathbb{Z}[X]$ entonces $\mathcal{I} \cap \mathbb{Z}$ es un ideal primo de $\mathbb{Z}$.

22. Sea $p \in \mathbb{Z}$ un primo. Probar que $\mathbb{Z}[X]/ < p > \simeq \mathbb{Z}_p[X]$.

23. Sean A un anillo e $\mathcal{I}$ un ideal de A. Probar que hay una correspondencia biyectiva entre los ideales de $A/\mathcal{I}$ y los ideales de A que contienen a $\mathcal{I}$.

24. Sea $p \in \mathbb{Z}$ un primo. Probar que $< p >$ es un ideal primo en $\mathbb{Z}[i]$ si, y sólo si, -1 no es un cuadrado en $\mathbb{Z}_p$.

25. Probar que todo morfismo de anillos que sale de un cuerpo es inyectivo.

26. Hallar las unidades de $\mathbb{Z}[X]/ < X^3 >$.

27. Probar que si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es un morfismo de cuerpos entonces $f = id$.

28. Hallar todos los morfismos de cuerpos $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ que satisfacen $f(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}$.

Álgebra II
Práctica 5

1. Sean A y B anillos conmutativos, $\mathcal{P}$ un ideal primo de B y $f : A \longrightarrow B$ un morfismo de anillos. Probar que $f^{-1}(\mathcal{P})$ es un ideal primo.

2. Caracterizar los anillos cocientes

$$\mathbb{Z}[X]/<2,X> \qquad \mathbb{Z}[X]/<2> \qquad \mathbb{Z}[X]/<2X> \qquad \mathbb{Z}[X]/<X^2>$$

$$\mathbb{Z}[X]/<X^2+1> \quad \mathbb{Z}[X]/<X^2+X+1> \quad \mathbb{Z}[i]/<2> \quad \mathbb{Z}[i]/<2,1+i>$$

3. Sean A un anillo conmutativo con unidad y A' subanillo con $1 \in A'$. Probar o dar contraejemplo:

   a) A cuerpo $\Rightarrow$ A' cuerpo

   b) A dominio íntegro $\Rightarrow$ A' dominio íntegro

   c) A' dominio íntegro $\Rightarrow$ A dominio íntegro

4. ¿El $\det : M_n(A) \longrightarrow A$ es un morfismo de anillos? ¿y la traza?

5. Mostrar isomorfismos de

   a) $\mathbb{Q}[X]/<X^3+X> \simeq \mathbb{Q}\times\mathbb{Q}(i)$

   b) $\mathbb{R}[X]/<X^4-1> \simeq \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{C}$

6. Sean A anillo conmutativo y $f \in A[X]$, $f \neq 0$. Probar que f es divisor de cero en $A[X]$ si, y sólo si, existe $r \in A \setminus \{0\}$ tal que $rf = 0$.

7. Sean A dominio íntegro y $a \in A$. Probar que:

   a) a primo $\Rightarrow$ a irreducible

   b) A DFU, a irreducible $\Rightarrow$ a primo

   c) En $A = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$: $3, 7, 4+\sqrt{-5}, 1+2\sqrt{-5}, 1-2\sqrt{-5}$ son irreducibles y no primos. ¿Es $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ DFU ? ¿Es DF?

8. $A \subseteq B \subseteq C$ dominios íntegros. Buscar algún ejemplo de A y C DFU, B no.

9. A dominio íntegro, I ideal propio de A; $\pi : A \longrightarrow A/I$ la proyección canónica. Sean $f = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \in A[X]$ mónico y $\bar{f} = \sum_{i=0}^{n} \pi(a_i) X^i \in A/I[X]$. Probar que:
   f es reducible en $A[X]$ $\Rightarrow$ $\bar{f}$ es reducible en $(A/I)[X]$

10. Sea A DFU y $\mathbb{K}$ su cuerpo de cocientes.

   a) Probar que si $f, g \in A[X]$ son polinomios primitivos, fg es primitivo.

   b) Probar que si $f \in A[X]$ es irreducible, entonces visto como polinomio con coeficientes en $\mathbb{K}$ también es irreducible.

   c) Probar que si $f \in A[X]$ es primitivo y f es irreducible en $\mathbb{K}[X]$ entonces f es irreducible en $A[X]$.

   d) Probar que $A[X]$ es DFU.

11. **Criterio de irreducibilidad de Eisenstein:** Sea A un DFU y $\mathbb{K}$ su cuerpo de cocientes. Sea $f = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \in A[X]$. Supongamos que exista un primo $p \in A$ tal que:

   a) p no divide a a_n

   b) p divide a a_i, $0 \leq i \leq n-1$

   c) p^2 no divide a a_0

   Probar que f es irreducible en $\mathbb{K}[X]$

12. **Lema de Gauss:** Sea A un DFU y $\mathbb{K}$ su cuerpo de cocientes. Sea $f = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \in A[X]$ con $a_0 \neq 0$. Si p y q son elementos de A no nulos, coprimos entre sí tales que $\frac{p}{q} \in \mathbb{K}$ es raíz de f, demostrar que p/a_0 y q/a_n en A.

13. Probar que todo **ideal primo** de $\mathbb{Z}[X]$ es alguno de los siguientes:

   a) $< p >$ ó $< p, f >$ con $p \in \mathbb{Z}$ primo, $f \in \mathbb{Z}[X]$ tal que $\bar{f} \in \mathbb{Z}_p[X]$ es irreducible en $\mathbb{Z}_p[X]$

   b) $< f >$ donde f es primitivo e irreducible en $\mathbb{Q}[X]$

14. Sean $\mathbb{K}$ un cuerpo y $f, g \in \mathbb{K}[X_1, \ldots, X_n]$. Probar que:

   a) $f + g = 0$ ó $\mathrm{gr}(f+g) \leq \max\{\mathrm{gr} f, \mathrm{gr} g\}$

   b) $fg = 0 \Rightarrow f = 0$ ó $g = 0$. (Es decir, $\mathbb{K}[X_1, \ldots, X_n]$ es un dominio íntegro)

   c) $\mathrm{gr}(fg) = \mathrm{gr} f + \mathrm{gr} g$. (Sug: descomponer a f y g en suma de polinomios homogéneos.)

   d) Cuáles son los elementos inversibles de $\mathbb{K}[X_1, \ldots, X_n]$?

   e) Probar que $\mathbb{K}[X_1, \ldots, X_n]$ tiene estructura de $\mathbb{K}$-espacio vectorial y exhibir una base.

   f) Un polinomio de grado d en una variable tiene, a lo sumo, $d+1$ coeficientes no nulos o monomios. Cuántos coeficientes no nulos puede tener un polinomio de grado d en 2 variables?

g) Cuántos coeficientes no nulos puede tener un polinomio homogéneo de grado d en n variables?

h) Cuántos coeficientes no nulos puede tener un polinomio cualquiera de grado d en n variables?

i) Cuál es la dimensión del $\mathbb{K}$-espacio vectorial $\mathbb{K}[X_1, \ldots, X_n]_{\leq d} = \{f \in \mathbb{K}[X_1, \ldots, X_n] : f = 0 \text{ ó } \mathrm{gr} f \leq d\}$.

15. Caracterizar los anillos cocientes:

$$\mathbb{R}[X,Y,Z]/< X, Y > \qquad \mathbb{R}[X,Y,Z]/< X - Y^5 > \qquad \mathbb{R}[X,Y,Z]/< Y - Z^3, Z - X^3 >$$

16. Mostrar que $X^2 + Y^2 - 1$ y $XT - YZ$ son irreducibles en $\mathbb{Q}[X,Y]$ y $\mathbb{Q}[X,Y,Z,T]$ respectivamente.

17. Sea $I =< Y + X^2 - 1, XY - 2Y^2 + 2Y > \subset \mathbb{R}[X,Y]$. Decidir si $\mathbb{R}[X,Y]/I$ es un cuerpo.

Práctica 5-Adicionales

En esta práctica A será siempre un anillo conmutativo y $S \subset A$ será un conjunto multiplicativamente cerrado tal que $1 \in A$.

1. Si $x \in A$ es nilpotente, entonces $1 + x$ es una unidad.

2. Sean $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ e I ideales de A. Probar que:

   $I \subseteq \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2 \Rightarrow I \subseteq \mathcal{P}_1$ ó $I \subseteq \mathcal{P}_2$.

3. Probar que el conjunto de ideales primos de A tiene ideales minimales. Sug: Lema de Zorn.

4. Sea $N(A) = \{a \in A : \text{existe} n \in \mathbb{N}/a^n = 0\}$. Probar que:

$$N(A) = \bigcap_{\mathcal{P} \subset A \,\text{primo}} \mathcal{P}$$

5. Sea $f : A \to S^{-1}(A)$ el morfismo $a \to \frac{a}{1}$.

   a) Probar que si $I \subset S^{-1}(A)$ es un ideal entonces $I = f^{-1}(I)S^{-1}(A)$. Así la aplicación $I \to f^{-1}(I)$ es una inyección del conjunto de ideales de $S^{-1}(A)$ en el conjunto de ideales de A. Esta aplicación preserva inclusión e intersecciones y manda ideales primos en ideales primos.

   b) Probar que un ideal $J \subset A$ es de la forma $f^{-1}(I)$ para algún ideal $I \subset S^{-1}(A)$ si y solo si $J = f^{-1}(JS^{-1}(A)$. Mostrar que este es el caso si y solo si cada elemento $s \in S$ no es un divisor de cero en A/J. En particular, la correspondencia $I \to f^{-1}(I)$ es una biyección entre los ideales primos de $S^{-1}(A)$ y los ideales primos de A que no intersecan a S.

6. Probar que si A es un anillo noetheriano $S^{-1}(A)$ es un anillo noetheriano.

7. Probar que si $I \subset A$ es un ideal maximal entre los ideales que no intersecan a S entonces I es primo.

8. Probar que si $\mathcal{N}$ es el nilradical de A entonces $S^{-1}(\mathcal{N})$ es el nilradical de $S^{-1}(A)$.