ÁLGEBRA II

ÁLGEBRA II

Práctica 6

A lo largo de esta práctica A-módulo significa A-módulo a izquierda.

1. Determinar si M es un A-módulo en cada uno de los siguientes casos:

   a) $A = \mathbb{Z}_n$, $M = \mathbb{Z}_m$, con $n, m \in \mathbb{N}$ tales que m divide a n , con la suma usual de $\mathbb{Z}_m$ y la acción
   $$a.x = r_m(ax).$$

   b) $A = \mathbb{Z}$, $M = M_2(\mathbb{C})$, con la suma usual de matrices y la acción
   $$a \cdot \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot z_{11} & a \cdot z_{12} \\ a \cdot z_{21} & a \cdot z_{22} \end{pmatrix}.$$

   c) $A = \mathbb{R}[X]$, $M = \mathbb{R}^n$, con la suma usual de $\mathbb{R}^n$ y la acción
   $$f.(x_1, x_2, \dots, x_n) = (f(1).x_1, f(0).x_2, \dots, f(0).x_n).$$

   d) $A = M_n(\mathbb{Z})$, $M = \mathbb{Z}$, con la suma usual de números enteros y la acción
   $$a \cdot m = det(a) \cdot m.$$

2. Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo

   a) Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y sea $u \in End_{\mathbb{K}}(V)$. Probar que existe una única estructura de $\mathbb{K}[X]$-módulo en V que satisface
   $$(kX^0) \cdot v = k \cdot v$$
   $$X. \cdot v = u(v)\,.$$

   b) Sea M un $\mathbb{K}[X]$-módulo y sea $u : M \longrightarrow M$ la aplicación definida por $u(v) = X.v$ Probar que con la acción $k \cdot v = (kX^0) \cdot v$ M es un K-espacio vectorial y $u \in End_{\mathbb{K}}(M)$.

3. Sean A y B anillos, sea M un B-módulo y sea $\varphi : A \longrightarrow B$ un morfismo de anillos. Probar que la acción $a \cdot_\varphi x = \varphi(a) \cdot x$ define una estructura de A-módulo sobre M.

   Sea M un A-módulo y sea S un subconjunto de M. Se llama **anulador** *de S al conjunto*
   $$An(S) = \{a \in A \ / \ a.s = 0 \quad \forall s \in S\}.$$

   Si $x \in M$, $An(\{x\})$ será denotado $An(x)$.

   Un A-módulo M se dice **fiel** *si $An(M) = \{0\}$.*

4. Probar que

    a) $\mathrm{An}(S)$ es un ideal a izquierda de A.

    b) $\mathrm{An}(S) = A$ si y sólo si $S \subseteq \{0\}$.

    c) Si $S \subseteq T$ entonces $\mathrm{An}(T) \subseteq \mathrm{An}(S)$.

    d) $\mathrm{An}(S) = \bigcap_{s \in S} \mathrm{An}(s)$.

    e) $M_n(A)$ es un A-módulo fiel y exhibir otros ejemplos de módulo fiel.

    f) $\mathbb{Z}_n$, con $n > 2$, no es un $\mathbb{Z}$-módulo fiel y hallar $\mathrm{An}(\mathbb{Z}_n)$.

    g) Si $J \neq \emptyset$ entonces $\mathrm{An}(M^J) = \mathrm{An}(M^{(J)}) = \mathrm{An}(M)$.

Sea M un A-módulo y sean S un subconjunto de M y N un submódulo de M. Se llama **transportador** *de S en N al conjunto*

$$(N : S) = \{a \in A : a.s \in N \quad \forall s \in S\}$$

Si $x \in M$, $(N : \{x\})$ será denotado $(N : x)$.

5. Probar que

    a) $(N : S)$ es un ideal a izquierda de A.

    b) $(0 : S) = \mathrm{An}(S)$ y $(N : S) = A$ si y sólo si $S \subseteq N$.

    c) Si $S \subseteq T$ entonces $(N : T) \subseteq (N : S)$.

    d) Si P es un submódulo de M tal que $N \subseteq P$ entonces $(N : S) \subseteq (P : S)$.

    e) $(N : x) \cdot x = N \cap A \cdot x$.

    f) Si $J \neq \emptyset$ entonces $(N^J : M^J) = (N^{(J)} : M^{(J)}) = (N : M)$.

    g) Hallar $(m\mathbb{Z} : n)$ para $m, n \in \mathbb{N}$.

6. Determinar si S es un submódulo del A-módulo M en cada uno de los siguientes casos:

    a) $A = \mathbb{Q}$, $M = M_n(\mathbb{Q})$, $S = \{(a_{ij}) \in M_n(\mathbb{Q}) : a_{ii} = 0 \; \forall \, 1 \leq i \leq n\}$.

    b) $A = \mathbb{Z}$, $M = M_n(\mathbb{Z})$, $S = \{(a_{ij}) \in M_n(\mathbb{Z}) : det(a_{ij}) = 0\}$

    c) A un anillo cualquiera , $M = A^n$, $S = \{(x_1, \ldots, x_n) \in A^n : x_1 + \cdots + x_n = 0\}$.

    d) A un anillo cualquiera , $M = A[X]$, $S = \{f \in A[X] : f = 0 \text{ o } \deg(f) \leq n\} \qquad (n \in \mathbb{N})$.

7. Sean A un anillo conmutativo, $a \in A^{n \times m}$ y $f_a : A^{m \times 1} \to A^{n \times 1}$ la aplicación definida por $f_a(x) = a \cdot x$ (donde $\cdot$ es el producto de matrices). Probar que es un morfismo de A-módulos.

8. Sean A un anillo conmutativo y M un A-módulo. En cada uno de los siguientes casos, probar que f es un morfismo de A-módulos, hallar su núcleo, su imagen y determinar si es monomorfismo, epimorfismo, sección, retracción o isomorfismo:

   a) $f : M^n \longrightarrow M^2$, $f(x) = (x_1 + x_n, x_n)$ $(n > 2)$.

   b) $f : M^n \longrightarrow M^n$, $f(x) = (x_1, x_1 + x_2, \ldots, x_1 + \cdots + x_n)$.

   c) Si $n \leq m$, $f : M^n \longrightarrow M^m$, $f(x) = (x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots 0)$.

   d) Si $n \leq m$, $f : M^m \longrightarrow M^n$, $f(x) = (x_1, \ldots, x_n)$.

   e) Fijo $a \in A$, $f : A[X] \longrightarrow A$, $f(g) = g(a)$.

   f) $f : M_n(A) \longrightarrow A^n$, $f(a) = (a_{11}, \ldots, a_{nn})$ si $a = (a_{ij})$

   g) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = 2x$.

9. Si M y N son conjuntos y $f : M \longrightarrow N$ es una función, el conjunto

$$\Gamma(f) = \{(x, f(x)) : x \in M\}$$

   se llama el gráfico de f. Probar que si M y N son A-módulos entonces f es un morfismo de A-módulos si y sólo si $\Gamma(f)$ es un submódulo de $M \oplus N$.

10. Sea A un anillo y sean M y N dos A-módulos. Probar que si $f : M \longrightarrow N$ es un morfismo de A-módulos entonces $\ker(f)$ es un submódulo de M, $\operatorname{im}(f)$ es un submódulo de N y $M \big/ \ker(f) \simeq \operatorname{im}(f)$.

11. Sean A un anillo y M un A-módulo. Caracterizar el módulo cociente N/S en cada uno de los siguientes casos:

    a) $N = M^n$, $S = \{x \in N : x_1 + \cdots + x_n = 0\}$.

    b) $N = M^n$ $(n > 2)$, $S = \{x \in N : x_1 = x_n \text{ y } x_2 = 0\}$.

    c) $N = A[X]$, $S = \{f \in A[X] : f(1) = 0\}$.

    d) $N = M_n(A)$, $S = \{(a_{ij} \in M_n(A) : a_{ii} = 0 \, \forall \, 1 \leq i \leq n\}$.

    e) $N = M^J$, $S = \{x \in N : x_i = 0 \, \forall \, i \in I\}$, donde I es un subconjunto fijo de J.

12. *a*) Probar que si $f, g : (\mathbb{Q}, +) \longrightarrow (\mathbb{Q}, +)$ son morfismos de grupos entonces son equivalentes:

    1) $f(1) = g(1)$.

    2) $f(m) = g(m)$ $\forall \, m \in \mathbb{Z}$.

    3) $f = g$.

b) Probar que si $f : (\mathbb{Q}\,,+) \longrightarrow (\mathbb{Q}\,,+)$ es un morfismo de grupos tal que $f(1) = 1$ entonces $f = id_{\mathbb{Q}}$.

c) Sean V y W dos $\mathbb{Q}$-espacios vectoriales y sea $f : V \longrightarrow W$ una aplicación. Probar que f es una transformación lineal de $\mathbb{Q}$-espacios vectoriales si, y sólo si, $f : (V\,,+) \longrightarrow (W\,,+)$ es un morfismo de grupos .

13. Sea A un anillo y sean M y N dos A-módulos. Probar que

    a) $Hom_A(M,N)$ con la suma definida por $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$ es un grupo abeliano.

    b) Si A es conmutativo, la acción $(a.f)(x) = a.f(x)$ define sobre el grupo abeliano $Hom_A(M,N)$ una estructura de A-módulo. Para A no necesariamente conmutativo, esta acción define sobre $Hom_A(M,N)$ una estructura de $\mathcal{C}(A)$-módulo.

14. Sea A un anillo conmutativo. Dado un A-módulo M se llama *dual* de M al A-módulo $M^* = Hom_A(M,A)$. Probar que la aplicación $\psi : M \longrightarrow M^{**}$ definida por

$$\psi(x)(f) = f(x) \qquad (x \in M\,,\ f \in M^*)$$

es un morfismo de A-módulos y que $\ker(\psi) = \bigcap_{f \in M^*} \ker(f)$.

15. Sea M un A-módulo. Probar que $Hom_A(A,M) \simeq M$ como $\mathcal{C}(A)$-módulos.

16. Probar que $Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}\,,\mathbb{Q}) \simeq \mathbb{Q}$.

17. Probar que un A-módulo M es simple si, y sólo si, $M \neq \{0\}$ y $A.x = M \;\; \forall\, x \in M$ tal que $x \neq 0$.

18. Sea $f : M \longrightarrow N$ un morfismo de A-módulos. Probar que:

    a) Si M es simple entonces $f = 0$ o f es un monomorfismo.

    b) Si N es simple entonces $f = 0$ o f es un epimorfismo.

    c) Si M y N son simples entonces $f = 0$ o f es un isomorfismo.

19. Sea M un A-módulo. Probar que $End_A(M) = Hom_A(M,M)$ con la suma definida por $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$ y la composición de funciones es un anillo y que, cuando M es simple, $End_A(M)$ es un anillo de división.

Álgebra II
Práctica 7

1. Probar que los grupos abelianos $\mathbb{Q}^*$, $\mathbb{R}^*$, $\mathbb{C}^*$, $\mathbb{Q}_{>0}$ y $\mathbb{R}_{>0}$ no son finitamente generados

2. Probar que

   a) Todo módulo de tipo finito posee un sistema de generadores minimal

   b) Para todo $n \in \mathbb{N}$ existe en $\mathbb{Z}$ (considerando a $\mathbb{Z}$ como $\mathbb{Z}$-módulo) un sistema de generadores minimal con n elementos

3. Probar que

   a) Todo submódulo de un módulo localmente cíclico es localmente cíclico

   b) Si M es localmente cíclico y $f : M \longrightarrow N$ es un epimorfismo de A-módulos entonces N es localmente cíclico

   c) $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{Q}/_{\mathbb{Z}}$ son grupos abelianos ($\mathbb{Z}$-módulos) localmente cíclicos pero no son de tipo finito

4. Sea A un dominio íntegro y sea $a \in M_n(A)$. Para cada $1 \leq j \leq n$ sea $v_j = (a_{1j}, \ldots, a_{nj}) \in A^n$. Probar que

   a) $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es linealmente independiente si y sólo si $det(A) \neq 0$.

   b) $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es un sistema de generadores de A^n si y sólo si $det(A) \in \mathcal{U}(A)$.

   item Sea A un anillo y sea M un A-módulo. Probar que si todo conjunto no vacío de submódulos finitamente generados de M tiene un elemento maximal entonces M es Noetheriano

5. Dar un ejemplo de

   a) Un A-módulo finitamente generado que no sea Noetheriano.

   b) Un A-módulo tal que todo submódulo propio sea finitamente generado y que no sea Noetheriano.

6. Probar que

   a) Un $\mathbb{K}$-espacio vectorial V es Noetheriano si y sólo si $dim_K(V) < \infty$.

   b) Todo anillo principal a izquierda es Noetheriano a izquierda.

   c) $\mathbb{Z}$ y $K[X]$ (con K cuerpo) son anillos Noetherianos.

7. Sea A un anillo y sea M un A-módulo. Sea $f \in End_A(M)$ y, para cada $n \in \mathbb{N}$, sean $K_n = Ker(f^n)$, $I_n = Im(f^n)$. Probar que

   a) $K_1 = K_2 \Rightarrow K_1 \cap I_1 = 0$.
   b) $I_1 = I_2 \Rightarrow K_1 + I_1 = M$.
   c) Si M es Noetheriano entonces $\exists\, n \in \mathbb{N}$ tal que $K_n \cap I_n = 0$.
   d) Si M es Noetheriano y f es un epimorfismo entonces f es un automorfismo.

8. Sea $d \in \mathbb{Z}$ y sea $\sqrt{d}$ una raíz cuadrada de d en $\mathbb{C}$. Sea $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ el submódulo de $\mathbb{C}$ formado por los elementos de la forma $a + b\sqrt{d}$ con $a, b \in \mathbb{Z}$. Probar que $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ es Noetheriano

9. Probar que no existe un epimorfismo de grupos

   a) de $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ en $\mathbb{Z}_{p^\infty} \oplus \mathbb{Z}_p$
   b) de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{Z}_{p^\infty} \oplus \mathbb{Z}_{p^\infty}$
   c) de $\mathbb{Q}/_{\mathbb{Z}}$ en $\mathbb{Z}_{p^\infty} \oplus \mathbb{Z}_n$

10. Sea p un primo. Probar que no existe una sección

    a) de $\mathbb{Z}_p$ en $\mathbb{Z}_{p^2} \oplus \mathbb{Z}_{p^2}$
    b) de $\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p$ en $\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_{p^2}$
    c) de $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_p$ en $\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_{p^2}$

11. 14. Calcular

    a) $Hom(\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}_n \,,\, \mathbb{Z}_p)$
    b) $Hom(\bigoplus_{p\, primo} \mathbb{Z}_p \,,\, G_3)$

12. Sea G un grupo abeliano y sean S y T subgrupos de G tales que $G \sim S \oplus T$. Probar que si existe un monomorfismo de $\mathbb{Q}$ en G entonces existe un monomorfismo de $\mathbb{Q}$ en S o existe un monomorfismo de $\mathbb{Q}$ en T.

13. a) Sea $e : \mathbb{Z}_n \longrightarrow \mathbb{Z}_n$ un morfismo de grupos. Probar que e es un proyector si y sólo si $\exists\, a \in \mathbb{Z}_n$ tal que $n \mid a^2 - a$ y $e(x) = a.x$ para todo $x \in \mathbb{Z}_n$
    b) Sea $a \in \mathbb{Z}_n$, sea $f : \mathbb{Z}_n \longrightarrow \mathbb{Z}_n$ el morfismo definido por $f(x) = a.x$ y sea $d = (a, n)$. Probar que $Ker(f) =< \frac{n}{d} >$ y que $Im(f) =< d >$
    c) Sean $n, d \in \mathbb{Z}$. Probar que si $n = p_1^{\alpha_1} \ldots p_r^{\alpha_r}$, con $p_1, \ldots, p_r$ primos positivos distintos y $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{N}$ entonces $d = (a, n)$ para algún $a \in \mathbb{Z}$ tal que n divide a $a^2 - a$ si, y sólo si, $d = p_1^{\beta_1.\alpha_1} \ldots p_r^{\beta_r.\alpha_r}$ con $\beta_i \in \mathbb{N}_0$, $0 \leq \beta_i \leq 1$

d) Encontrar los sumandos directos de $\mathbb{Z}_n$ y, para cada uno de ellos, determinar un suplemento

14. Sea

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & M' & \longrightarrow & M & \longrightarrow & M'' & \longrightarrow & 0 \\ & & f' \downarrow & & f \downarrow & & & & \\ 0 & \longrightarrow & N' & \longrightarrow & N & \longrightarrow & N'' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

un diagrama conmutativo de A-módulos, con filas exactas. Probar que existe una única $f'' : M'' \longrightarrow N''$ que completa el diagrama conmutativo y que, si f y f' son isomorfismos, entonces f'' es un isomorfismo.

15. Sea $0 \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow P \longrightarrow 0$ una sucesión exacta de A-módulos. Probar que

a) Si N es finitamente generado entonces P es finitamente generado

b) Si M y P son finitamente generados entonces N es finitamente generado

c) N es Noetheriano si y sólo si M y P son Noetherianos

16. Lema de los cinco: sea

$$\begin{array}{ccccccccc} A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C & \longrightarrow & D & \longrightarrow & E \\ \alpha \downarrow & & \beta \downarrow & & \gamma \downarrow & & \delta \downarrow & & \varepsilon \downarrow \\ A' & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & C' & \longrightarrow & D' & \longrightarrow & E' \end{array}$$

un diagrama conmutativo de A-módulos, con filas exactas. Probar que si α, β, δ y ε son isomorfismos entonces γ es un isomorfismo

17. Sean M_1, M_2, M_3 A-módulos. Probar que la sucesión $0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_2 \longrightarrow M_3$ es exacta si y sólo si la sucesión $0 \longrightarrow Hom(M, M_1) \longrightarrow Hom(M, M_2) \longrightarrow Hom(M, M_3)$ es exacta para todo A-módulo M

18. Sea A un anillo y M un A-módulo. Decidir si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa:

a) Si M es libre, entonces es sin torsión.

b) Si A es íntegro entonces M libre $\Rightarrow$ M sin torsión.

c) Si $f : M \longrightarrow N$ es un morfismo de A-módulos y M es de torsión entonces $Im(f)$ es de torsión.

d) Si $f : M \longrightarrow N$ es un morfismo de A-módulos y M es sin torsión entonces $Im(f)$ es sin torsión.

e) Si A es conmutativo y N es sin torsión entonces $Hom_A(M,N)$ es sin torsión.

f) Si A es conmutativo, M es de torsión y N es sin torsión entonces $Hom_A(M,N) = 0$.

19. Calcular $t\left(\mathbb{R}/_{\mathbb{Z}}\right)$.

20. Sea A un dominio principal que no es un cuerpo y sea M un A-módulo. Probar:

    a) Sea $p \in A$ un irreducible y $a \in A - \{0\}$. Entonces $(A/ < a >)[p] \simeq A/ < p^n >$ donde $n = \text{máx}\{k \in \mathbb{N}_0 \ / \ p^k | a\}$.

    b) M es simple $\iff$ $\exists \, p \in A$ irreducible tal que $M \simeq A/ < p >$.

    c) M es un A-módulo sin torsión $\iff$ $Hom_A(S,M) = 0$ para todo A-módulo simple S.

21. Sea A un dominio principal y sea M un A-módulo de tipo finito (es decir finitamente generado). Probar:

    a) M es de torsión $\iff$ $Hom_A(M,A) = 0$.

    b) M es indescomponible (es decir, no tiene sumandos directos propios) $\iff$ $M \simeq A$ o $\exists \, p \in A$ irreducible y $n \in \mathbb{N}$ tales que $M \simeq A/ < p^n >$.

22. Sea A un dominio principal y sea M un A-módulo. Probar:

    a) Si M es de tipo finito y S es un submódulo libre de M tal que M/S es sin torsión, entonces M es libre.

    b) Si M no es de torsión y M/S es de tipo finito con torsión para todo submódulo $S \neq 0$ de M, entonces $M \simeq A$. Análogamente, si G es un grupo infinito tal que todo subgrupo no nulo tiene índice finito, $G \simeq \mathbb{Z}$.

23. Sea p un primo positivo. Clasificar todos los grupos abelianos de orden p^3, p^4 y p^5.

24. Clasificar los grupos abelianos de orden 18, 45, 100 y 180.

25. *a*) Sea G un grupo abeliano finito y sea p un primo positivo que divide al orden de G. Probar que el número de elementos de orden p en G es coprimo con p.

    b) Para cada grupo abeliano G de orden p^2q^2 (donde p y q son primos distintos) determinar cuántos elementos de orden pq y cuántos elementos de orden pq^2 hay en G.

26. Caracterizar los grupos abelianos finitamente generados tales que:

    a) Todo subgrupo propio de G es cíclico.

    b) Todo subgrupo propio de G es de orden primo.

c) G posee exactamente 2 subgrupos propios no nulos.

d) G posee exactamente 3 subgrupos propios no nulos.

e) Todo subgrupo propio no nulo de G es maximal.

f) Para todo par de subgrupos S y T de G, $S \subseteq T$ o $T \subseteq S$.

g) El orden de todo elemento no nulo de G es primo.

h) $G/_S$ es cíclico para todo subgrupo S no nulo de G.

i) Todo par de subgrupos propios no nulos son isomorfos.

27. Calcular los factores invariantes (coeficientes de estructura) de los siguientes grupos abelianos:

a) $\mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_6 \oplus \mathbb{Z}_9$.

b) $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_8 \oplus \mathbb{Z}_{14}$.

c) $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_{49} \oplus \mathbb{Z}$.

d) $\mathbb{Z}_{12} \oplus \mathbb{Z}_{21} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_{20} \oplus \mathbb{Z}_9 \oplus \mathbb{Z}_7$.

e) G un grupo abeliano de orden 36 que tiene exactamente 2 elementos de orden 3 y que no tiene elementos de orden 4.

f) G un grupo abeliano de orden 225 que tiene por lo menos 40 elementos de orden 15 y tal que todo subgrupo de orden 9 de G es isomorfo a $\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3$.

28. Determinar los factores invariantes de los siguientes grupos abelianos dados por generadores y relaciones:

a) $G =< a, b, c >; \quad 2a + 3b = 0; \quad 2a + 4c = 0$

b) $G =< a, b, c >; \quad a = 3b; \quad a = 3c$

c) $G =< a, b, c >; \quad 3a = -c; \quad 3a = 3c - 8b$

d) $G ==< a, b, c >; \quad 3a = b; \quad b = 3c$

29. Calcular los coeficientes de estructura de los siguientes cocientes:

a) $\mathbb{Z}^4/S$ con $S = \{m \in \mathbb{Z}^4 \ / \ m_1 + m_2 + m_3 + m_4 = 0, \ m_1 + m_2 - 2m_3 = 0\}$.

b) $\mathbb{Z}^3/S$ con $S = \{m \in \mathbb{Z}^3 \ / \ m_1 \text{ es par}, m_1 + 5m_2 - m_3 = 0\}$.

c) $\mathbb{Z}^3/S$ con $S = \{m \in \mathbb{Z}^3 \ / \ m_1 = m_2 + m_3 \text{ es par}, 3|m_3\}$.

30. Sean p, q y r primos positivos. Determinar la cantidad de grupos no isomorfos de orden n, en cada uno de los siguientes casos:

a) $n = p^6 q^3 r$.

b) $n = p^2q^4r^5$.

c) $n = p^3q^4$.

31. *a*) Sea G un grupo abeliano de orden n. Probar que si d es un divisor de n, G posee subgrupos y grupos cocientes de orden d.

b) Sea $n \in \mathbb{N}$. ¿Para qué divisores d de n existe un grupo abeliano de orden n y exponente d?

c) Caracterizar los grupos abelianos finitos de orden menor o igual que 100 de exponente 9, 20 y 21.

d) Sea G un grupo abeliano y sea $x \in G$ un elemento tal que $\operatorname{ord}(x) = \exp(G)$. Probar que $< x >$ es un sumando directo de G.