2^{do} cuatrimestre 2005

Álgebra II
Práctica 0

1. *a*) (Pequeño Teorema de Fermat) Sea p un primo, $(a,p)=1$. Entonces

$$a^{p-1} \equiv 1 \ (p).$$

b) Sea $\sigma(a) = \min \{\ell / a^\ell \equiv 1\,(p)\}$. Probar que $a^h \equiv 1 \ (p) \Rightarrow \sigma(a)/h$.

c) Sean p y q primos impares. Si $p/2^q-1$, entonces $p>q$. Deducir que existen infinitos primos.

d) (Teorema Chino del Resto) Sean $a_1,\dots,a_n \in \mathbb{Z}$, $m_1,\dots,m_n \in \mathbb{N}$ tales que $(m_i,m_j)=1$ para $i \neq j$.

Probar que entonces existe $M \in \mathbb{Z}$ tal que $M \equiv a_i\,(m_i), \forall i$ y que M es único módulo $\prod_{i=1}^n m_i$.

e) (Teorema de Wilson) Probar que

$$p \,\text{es primo} \Leftrightarrow (p-1)! \equiv -1 \ (p)$$

2. *a*) Probar que existen infinitos primos (otra forma). Considerar $q=(2{,}3{,}5\dots p)+1$.

b) Probar que si p es un primo de la forma $4k+3$, entonces $X^2 \equiv -1 \ (p)$ NO tiene solución (o sea, -1 no es un cuadrado módulo p).

c) Probar que si p es un primo de la forma $4k+3$ tal que p/a^2+b^2 entonces p/a y p/b. Deducir que un primo de la forma $4k+3$ no es suma de dos cuadrados en $\mathbb{Z}$.

d) Probar que hay infinitos primos de la forma $4k+1$. (Considerar $(2p_1\dots p_r)^2+1$).

e) Probar que hay infinitos primos de la forma $4k+3$. (Considerar $4p_1\dots p_s+3,\ p_i \neq 3$).

3. *a*) Sea p primo. Consideremos

$$a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_1X + a_0 \equiv 0 \ (p)$$

donde $a_i \in \mathbb{Z}$ y $(a_n,p)=1$.

Probar que esta ecuación tiene, a lo sumo, n soluciones no congruentes módulo p.

b) $X^2 - X \equiv 0 \ (6)$ tiene 4 soluciones. ¿ Contradice esto a)?

4. Sea p un primo impar. Probar que

a) $(a,p)=1 \Rightarrow a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1$ ó $-1 \ (p)$.

b) Existe x tal que $a \equiv x^2\,(p) \Rightarrow a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1\,(p)$.

c) $1^2, 2^2, \ldots, (\frac{p-1}{2})^2$ son todos no congruentes módulo p.

d) $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1\ (p) \Rightarrow \exists x / a \equiv x^2\ (p)$.

e) a no es un cuadrado módulo $p \Leftrightarrow a^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1\ (p)$.

f) Si p es un primo de la forma $4k+1$, entonces -1 es un cuadrado módulo p. Deducir que $x^2 \equiv -1\ (p) \Leftrightarrow p = 4k+1$.

g) Probar que $(2k)!$ es solución de $X^2 \equiv -1\ (p)$ si $p = 4k+1$.

5. a) Resolver completamente (encontrar todas las soluciones no congruentes módulo p)

$$X^2 \equiv -1\ (5)\ ;\ X^2 \equiv -1\ (17)\ ;\ X^2 \equiv 8\ (17)$$

b) Factorizar módulo 5, $p(X) = 6X^4 - 18X^3 + 4X^2 + 9X - 6$.

6. (Función φ de Euler) Probar que:

a) $\varphi(n)$ es par, $\forall n > 2$.

b) $\varphi(n) = \frac{n}{2} \Leftrightarrow n = 2^k$ con $k \geq 1$.

c) $n/m \Rightarrow \varphi(n)/\varphi(m)$.

d) $\sum_{d/n} \varphi(d) = n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

e) $\sum_{k \leq n, (k,n)=1} k = \frac{1}{2} n\varphi(n)$ para todo $n \geq 2$.

f) Para todo k existen a lo sumo finitas soluciones de $\varphi(n) = k$.

7. (Teorema de Euler, generalización del Pequeño Teorema de Fermat)

a) Sea $(a,n) = 1$. Para todo $c \leq n$ tal que $(c,n) = 1$, se define una aplicación $c \to r_n(a.c)$. Probar que esta aplicación es una biyección del conjunto de restos coprimos con n en él mismo.

b) Sean $c_1, c_2, \ldots c_{\varphi(n)}$ esos restos. Probar que:

$$c_1.c_2 \ldots c_{\varphi(n)} \equiv ac_1 ac_2 \ldots ac_{\varphi(n)}\ (n).$$

Deducir que $a^{\varphi(n)} \equiv 1\ (n)$ (teorema de Euler). En particular, si $n = p$ es primo, deducir el Pequeño

Teorema de Fermat.

c) Calcular $r_{20}(2033^{4754})$.

Álgebra II
Práctica 1

1. Sea $n \in \mathbb{N}$ y sea $G_n = \{z \in \mathbb{C} / z^n = 1\}$.

   a) Probar que $(G_n\,,\cdot)$ es un grupo abeliano y hallar z^{-1} para cada $z \in G_n$.

   b) Probar que G_n es cíclico, es decir, que existe $w \in G_n$ que satisface: $\forall\, z \in G_n \;\; \exists\, k \in \mathbb{Z}$ tal que $z = w^k$.

2. Sea $G = \mathbb{Z}_n = \{a \in \mathbb{Z}/0 \leq a < n\}$ con $a * b = r_n(a+b)$. Probar que $(\mathbb{Z}_n, *)$ es un grupo y determinar si es abeliano.

3. Sea $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \,/\, |z| = 1\}$.

   a) Probar que $(S^1, \cdot)$ es un grupo abeliano y hallar z^{-1} para cada $z \in S^1$.

   b) Determinar si S^1 es cíclico.

4. En cada uno de los siguientes casos determinar si $(G, *)$ es un grupo y, en caso afirmativo, determinar si es abeliano:

   a) $G = \mathbb{N}_0 \qquad a * b = [a, b]$.

   b) $G = \mathbb{Q}_{>0} \qquad a * b = a \cdot b$.

   c) $G = M_3(\mathbb{Z}) \qquad a * b = a \cdot b$.

   d) $G = M_n(\mathbb{R}) \qquad a * b = a + b$.

   e) $G = SL_n(\mathbb{R}) = \{a \in M_n(\mathbb{R}) \,/\, det\ a = 1\} \qquad a * b = a \cdot b$.

   f) $G = End_K(V)$, con V un K-espacio vectorial $\qquad f * g = f \circ g$.

   g) $G = \{f \in End_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n) \,/\, d(f(x), f(y)) = d(x, y)\ \forall\, x, y \in \mathbb{R}^n\} \qquad f * g = f \circ g$.

   h) $G = S(X) = \{f : X \longrightarrow X \,/\, f \text{ es biyectiva}\}$, donde X es un conjunto no vacío y $f * g = f \circ g$.

   Notación: Cuando $X = \{1, \ldots, n\}$ $S(X)$ será notado S_n.

   i) $G = S(\mathbb{Z}) \qquad f * g = f \circ g^{-1}$.

   j) $G = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \qquad (a, b) * (c, d) = (r_2(a + c), r_2(b + d))$.

   k) $G = \mathcal{U}_n = \{a \in \mathbb{Z}_n \,/\, (a, n) = 1\} \qquad a * b = r_n(a \cdot b)$.

5. Probar que

   a) $G_n \subseteq G_m$ si y sólo si $n \mid m$.

b) $G_n \cap G_m = G_{(n,m)}$.

6. En cada uno de los siguientes casos, probar que H es un subgrupo de $(G, *)$:

   a) $G = \mathbb{C}^*$ $\quad * = \cdot \quad$ $H = S^1$.

   b) $G = D_4$ $\quad * = \circ \quad$ $H = \{1, \rho, \rho^2, \rho^3\}$.

   c) $G = GL_n(\mathbb{C})$ $\quad * = \cdot \quad$ $H = \mathcal{H}$
   donde $\mathcal{H} = \left\{ \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \right\}$.

   d) $G = S^1$ $\quad * = \cdot \quad$ $H = G_n$.

   e) $G = \mathbb{Z}_{2n}$ $\quad a * b = r_{2n}(a + b) \quad$ $H = \{a \in G \,/\, a \text{ es par}\}$.

   f) $G = GL_n(\mathbb{R})$ $\quad * = \cdot \quad$ $H = SL_n(\mathbb{R})$.

7. Probar que todos los grupos de 4 elementos son abelianos. (Sug: hacer las posibles tablas de operaciones).

8. Sea G un grupo y sean H_1 y H_2 dos subgrupos de G.

   a) Probar que $H_1 \cap H_2$ es un subgrupo.

   b) Probar que $H_1 \cup H_2$ es un subgrupo si y sólo si $H_1 \subset H_2$ o $H_2 \subset H_1$.

9. Hallar todos los subgrupos cíclicos de: $\mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_5$, $\mathbb{Z}_6$, G_3, G_4, S_3, $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3$.

10. Sean G un grupo y $a \in G$. Probar que $C_a = \{x \in G;\ x \cdot a = a \cdot x\}$ es un subgrupo de G.

11. Probar que si H es un subgrupo de $\mathbb{Z}$ entonces existe $n \in \mathbb{N}_0$ tal que $H = n. \cdot \mathbb{Z}$.

12. Probar que si H es un subgrupo finito de $\mathbb{C}^*$ entonces existe $n \in \mathbb{N}_0$ tal que $H = G_n$.

13. Sean $(G, \cdot)$ un grupo y $a, b \in G$

   a) Probar que las siguientes aplicaciones de G en G son biyectivas y encontrar sus inversas

      1) $x \longrightarrow a \cdot x$
      2) $x \longrightarrow a \cdot x \cdot b$
      3) $x \longrightarrow a \cdot x \cdot a^{-1}$
      4) $x \longrightarrow x^{-1}$
      5) $x \longrightarrow a \cdot x^{-1} \cdot a^{-1}$

   b) Determinar cuáles de estas aplicaciones son morfismos.

   c) Idem en el caso en que G sea abeliano.

14. Hallar $ord(x)$ en los casos:

   a) $G = S_8 \qquad x = (1\ 2)(5\ 6\ 7)$.

   b) $G = \mathbb{Z}_{12} \qquad x = 2 \qquad ; \qquad x = 3 \qquad ; \qquad x = 4$.

   c) $G = \mathcal{H} \qquad x = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$.

   d) $G = S^1 \qquad x = \cos(\frac{2\pi}{n}) + i\ \sin(\frac{2\pi}{n})$.

   e) $G = D_4 \qquad x = \rho^2\, s$.

   f) G un grupo cualquiera y $x = a^d$, donde $a \in G$ es un elemento de orden n y d es un número natural.

15. Sea $f : G \longrightarrow G$ un morfismo de grupos. Probar que $ord(f(x))$ divide a $ord(x)$ si $ord(x)$ es finito.

16. Sea $x \in \mathbb{Z}_n$. Probar que $ord(x) = n$ si y sólo si $(x, n) = 1$.

17. *a*) Calcular el orden de todos los elementos de S_3.

   b) Sea $\sigma := (1\,3\,2)$,encontrar el subgrupo $C_\sigma = \{r \in S_3;\ r.\sigma = \sigma.r\}$.

   c) Hallar, si existe, un $\sigma \in S_3$ tal que el subgrupo C_σ tenga orden 1; tenga orden 2; tenga orden 3; tenga orden 6.

18. *a*) Hallar el orden de cada elemento de $\mathbb{Z}_{12}$ y determinar todos los $x \in \mathbb{Z}_{12}$ tales que el subgrupo cíclico generado por x coincide con $\mathbb{Z}_{12}$.

   b) Hallar el orden de cada elemento de $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3$ y en $\mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_6$.

   c) Inspirándose en ii) probar que si G_1 y G_2 son grupos finitos, el orden de un elemento (g_1, g_2) en $G_1 \oplus G_2$ es el mínimo común múltiplo entre los órdenes de g_1 y g_2.

19. Sea p un número primo, $m \in \mathbb{N}$ y sea G un grupo de orden p^m. Probar que existe un elemento de orden p en G.

20. Determinar si G y K son isomorfos en los casos:

   a) $G = \mathbb{Z}_4 \qquad K = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$.

   b) $G = \mathbb{Z}_n \qquad K = G_n$.

   c) $G = \mathbb{Z}_{10} \qquad K = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_5$.

   d) $G = \mathbb{Q} \qquad K = \mathbb{R}$.

   e) $G = \mathcal{U}_{16} \qquad K = \mathcal{H}$.

   f) $G = \mathcal{U}_{16} \qquad K = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4$.

21. Dados los grupos:

$$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \qquad \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4 \qquad \mathbb{Z}_2 \oplus G_4 \qquad \mathbb{Z}_8$$

$$D_4 \qquad G_8 \qquad \mathcal{H} \qquad \mathcal{K}$$

donde $\mathcal{K} = \{1,\, i,\, j,\, k,\, -1,\, -i,\, -j,\, -k\}$ con $i^2 = j^2 = -1$ y $i \cdot j = k = -j \cdot i$

Decidir cuáles son abelianos, cuáles son cíclicos y cuáles son isomorfos entre sí.

22. Sea $f : G \longrightarrow L$ un epimorfismo. Decidir para cuáles P_i vale:

"G verifica $P_i \Rightarrow L$ verifica P_i"

(P_1) tener n elementos.

(P_2) ser finito.

(P_3) ser conmutativo.

(P_4) ser no conmutativo.

(P_5) ser cíclico.

(P_6) todo elemento tiene orden finito.

(P_7) todo elemento tiene orden 6.

(P_8) todo elemento tiene orden infinito.

23. Sea $f : G \longrightarrow L$ un monomorfismo. Decidir para cuáles P_i del ejercicio anterior vale: "L verifica $P_i \Rightarrow G$ verifica P_i".

24.
   a) Probar que $Aut(\mathbb{Z}) \simeq G_2$.
   b) Hallar $Hom(G_n\,,\, \mathbb{Z})$.
   c) Hallar $Hom(G\,,\, \mathbb{Z})$ para G un grupo de orden finito.

25. Sea $G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \;/\; a, b \in \mathbb{Z}_7,\ \text{con } a \neq 0 \right\}$.

   a) Hallar el orden de G.
   b) Para cada primo p que divide al orden de G hallar todos los elementos de G que tengan orden p.

26. Probar que $\{2,\, 3\}$ es un sistema de generadores de $\mathbb{Z}$.

27. Sea $G = M_2(\mathbb{Z}_2)$. Hallar $|G|$ y encontrar subgrupos de G de orden 2, 4 y 8.

28. a) Probar que son equivalentes:

    1) G es abeliano.

    2) La aplicación $f : G \longrightarrow G$ definida por $f(x) = x^{-1}$ es un morfismo de grupos.

    3) La aplicación $f : G \longrightarrow G$ definida por $f(x) = x^2$ es un morfismo de grupos.

    b) Probar que si $x^2 = 1$ para todo $x \in G$ entonces G es abeliano.

29. Probar que

    a) $Hom(\mathbb{Z}\,,\,\mathbb{Z}_n) \neq 0$.

    b) $Hom(\mathbb{Z}_5\,,\,\mathbb{Z}_7) = 0$.

    c) $Hom(\mathbb{Q}\,,\,\mathbb{Z}) = 0$.

    d) No existe un epimorfismo de $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.

30. Hallar dos grupos G y K no isomorfos tales que $Aut(G) \simeq Aut(K)$.

31. Sea $G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \,/\, a, b \in \mathbb{Z}_4,\ \text{con } (a,4) = 1 \right\}$. Probar que G es un grupo no abeliano de orden 8. ¿Es $G \simeq \mathcal{H}$? ¿Es $G \simeq D_4$?

32. Probar que si G es un grupo de orden ≤ 5, entonces es abeliano.

Álgebra II
Práctica 2

1. Sea G un grupo y sean X, Y subconjuntos no vacíos de G. Se define

$$X \cdot Y = XY = \{x \cdot y : x \in X,\, y \in Y\}$$

Si $x \in G$ escribimos $xH := \{x\}H$.

   a) ¿ Será cierto que si H y K son subgrupos de G entonces HK es subgrupo de G?

   b) Probar la equivalencia de las siguientes condiciones sobre un subgrupo H de G.

      1) $(\forall x)\, xH = Hx$
      2) $(\forall x)\, x^{-1}Hx \subset H$
      3) $(\forall x)\, x^{-1}Hx = H$

   Notar que cuando se verifica cualquiera de las condiciones anteriores H es un subgrupo normal.

2. Decidir cuáles de los subgrupos del ejercicio 6 de la práctica 1 son invariantes.

3. ¿Es $[G, G]$ un subgrupo invariante de $(G, *)$ para todo grupo $(G, *)$?

4. Sea G un grupo y H y K subgrupos.

   a) Si H ó K es normal entonces HK es subgrupo.

   b) Si H y K son subgrupos normales entonces $HK = KH$ es un subgrupo invariante de G.

5. Dados los siguientes subgrupos de S_4

   $K = \{id,\, (1\ 2)(3\ 4),\, (1\ 3)(2\ 4),\, (1\ 4)(2\ 3)\}$ $\quad H = \{id,\, (1\ 2)(3\ 4)\}$ $\quad U = <(1\ 2\ 3\ 4)>$

   a) Probar que $H \lhd K$, $K \lhd A_4$ y $K \lhd S_4$

   b) Probar que H no es invariante en A_4 ni en S_4

   c) Determinar si $U \lhd S_4$

6. Sean G y G' grupos y sea $f : G \to G'$ un morfismo. Probar que

   a) $\ker(f) \lhd G$

   b) ¿Es cierto que $\mathrm{im}(f) \lhd G'$?

   c) Recíprocamente si H es un subgrupo normal de G, existe un grupo G' y un epimorfismo $f : G \longrightarrow G'$ tal que $\ker(f) = H$.

7. Sea G un grupo y H un subgrupo tal que $|G:H|=2$. Probar que $H \lhd G$.

8. Hallar un sistema de representantes de G módulo S en los siguientes casos y determinar $|G:S|$

   a) $G=\mathbb{R} \qquad S=\mathbb{Z}$

   b) $G=GL(n,A) \qquad S=SL(n,A)$

   c) $G=D_n \qquad S=< r >$

   d) $G=\mathbb{C}^* \qquad S=S^1$

   e) $G=\mathbb{C}^* \qquad S=\mathbb{R}^* \cup \mathbb{R}^* i$

9. Sea G un grupo. Sea $a \in G$ y sea $I_a : G \longrightarrow G$ definida por $I_a(g)=a.g.a^{-1}$.

   a) Probar que I_a es un automorfismo de G (se denomina automorfismo interior de G).

   b) Probar que $Aut(G)$ es un grupo con la composición.

   c) Probar que la aplicación $I : G \longrightarrow Aut(G)$ es un morfismo de grupos y verificar que

   $$\ker(I)=\{a \in G \,:\, ag=ga, \forall g \in G\}$$

   Este subgrupo se llama el Centro de G y escribimos $\mathcal{C}(G)$.

   Probar que $\mathrm{im}(I)$ es un subgrupo invariante de $Aut(G)$.

   Deducir que $G/_{\mathcal{C}(G)} \simeq Int(G)$.

10. Sea G un grupo y H un subgrupo. Probar que $[G;G] \subseteq H \Leftrightarrow H \lhd G$ y G/H es abeliano.

11. Calcular todos los cocientes de S_3, D_4 y $\mathcal{H}$.

12. Probar que

    a) $\mathbb{C}^* /_{\mathbb{R}_{>0}} \simeq S^1$

    b) $\mathbb{Z} /_{m \cdot \mathbb{Z}} \simeq \mathbb{Z}_m$

    c) $GL_n(\mathbb{C}) /_{SL_n(\mathbb{C})} \simeq \mathbb{C}^*$

    d) $\mathbb{Q}^* /_{\mathbb{Q}_{>0}} \simeq G_2$

    e) $S^1 /_{G_n} \simeq S^1$

    f) Si $m \mid n$ entonces $G_n /_{G_m} \simeq G_{\frac{n}{m}}$

13. a) Sea $f : G \longrightarrow G'$ un isomorfismo y sea $H \lhd G$. Si $H'=f(H)$, probar que

       1) $H' \lhd G'$

       2) $G /_{\mathrm{H}} \simeq G' /_{\mathrm{H'}}$

b) ¿Qué pasa si $f : G \longrightarrow G'$ es un isomorfismo, $g : H \longrightarrow H'$ es un isomorfismo, $H \lhd G$, $H' \lhd G'$ con $G \big/ \mathrm{H}$ y $G' \big/ \mathrm{H'}$

14. Probar que los únicos grupos no abelianos de orden 8 son $\mathcal{H}$ y D_4.

15. Si $|G| = 2p$ entonces G es abeliano o $G \simeq D_p$.

16. Decidir cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuáles falsas

    a) Si $|G : H| = 2$ y H es abeliano entonces $H \subset \mathcal{C}(G)$.

    b) Si $|G| = n$ y k divide a n, existe un elemento de orden k.

    c) Si $|G| = n$ y k divide a n, existe un subgrupo de orden k.

    d) Si $\forall x \in G$, se tiene que $ord(x) < \infty \Rightarrow |G| < \infty$.

    e) Si $p/|G|$, entonces existe H subgrupo tal que $|G : H| = p$.

    f) Los elementos de orden finito de un grupo G forman un subgrupo.

ÁLGEBRA II
Práctica 3

1. Si $G \simeq_d H.K$ con H y K abelianos, entonces G es abeliano.

2. Probar que S_n y D_n ; $n \geq 3$ son isomorfos a productos semidirectos convenientes.

3. ¿ Es $\mathcal{H}$ isomorfo a algún producto semidirecto ?

4. Probar que S es un factor semidirecto de G en los siguientes casos:

   a) $G = \mathbb{C}^*$ $\quad S = S^1$

   b) $G = G_{12}$ $\quad S = G_3$

   c) $G = \mathbb{C}$ $\quad S = \mathbb{R}$

   d) $G = GL(n, \mathbb{C})$ $\quad S = SL(n, \mathbb{C})$

5. Probar en cada uno de los siguientes casos que el grupo G actúa sobre el conjunto X. En cada caso calcular ${}^G X$, las G-órbitas de X y el estabilizador de cualquier elemento de X

   a) $G = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax + b \text{ con } a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R}\}$, $X = \mathbb{R}$ y $f.x = f(x)$

   b) $G = \mathbb{R}^*$, $X = \mathbb{R}_{>0}$ y $a.x = x^a$ con $a \in \mathbb{R}^*$ y $x \in \mathbb{R}_{>0}$.

   c) $G = SL(2, \mathbb{Z})$, $X = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ y $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (ax + by, cx + dy)$

6. Sea G un grupo actuando sobre un conjunto X y $S \triangleleft G$. Determinar la condición necesaria y suficiente para que exista una acción de G/S en X tal que $\bar{a} \cdot x = a \cdot x \quad \forall\, a \in G$ y $x \in X$.

7. Sea X un conjunto finito. Determinar el número posible de acciones de $\mathbb{Z}$ sobre X.

8. Sea G un grupo.

   a) Probar que si $|G| = p^n$ con p primo y $n \in \mathbb{N}$ entonces $\mathcal{C}(G) \neq 1$

   b) Probar que si $G/_{\mathcal{C}(G)}$ es cíclico entonces G es abeliano

   c) Probar que si $|G| = p^2$ con p primo entonces G es abeliano

   d) Caracterizar todos los grupos de orden p^2.

   e) Dar un ejemplo de un grupo G no abeliano tal que $G/_{\mathcal{C}(G)}$ sea abeliano.

9. Sea G un grupo no abeliano tal que $|G| = p^3$. Probar que $\mathcal{C}(G) = [G; G]$ y calcular $|\mathcal{C}(G)|$.

10. Sea G un grupo tal que $|G| = 2n$, G tiene n elementos de orden 2 y los restantes forman un subgrupo H. Probar que entonces n es impar y $H \triangleleft G$.

11. Sea p primo y $|G| = n$. Entonces existe k tal que $n = p^k \Leftrightarrow \forall x \in G, ord(x) = p^s$ para algún s. (s depende de x)

12. G es un p-grupo $\Leftrightarrow$ $\forall H \triangleleft G$, H y G/H son p-grupos.

13. Calcular todos los p- subgrupos de Sylow de:

$$\mathbb{Z}_2 , \mathbb{Z}_{12} , \mathbb{Z}_{21} \oplus \mathbb{Z}_{15} , S_3 \oplus \mathbb{Z}_3 , S_3 \oplus S_3$$

14. Sea G un grupo, $|G| = pq$, $p > q$ primos tal que q no divide a $p - 1$. Probar que G es cíclico.

15. Sean p, q primos , $|G| = p^2 q$. Probar que G no es simple.

16. Probar que no existen grupos simples de los siguientes órdenes:

    $30, 36, 56, 96, 200, 204, 260, 2540, 9075$.

17. Sea G con $|G| < \infty$ y $p < q$ primos tal que p^2 no divide a $|G|$. Sean H_p y H_q subgrupos de Sylow de G con $H_p \triangleleft G$. Probar

    a) $H_p.H_q$ es subgrupo de G
    b) $H_p.H_q \triangleleft G \Rightarrow H_q \triangleleft G$.

18. Sea G un grupo y sea $H \triangleleft G$. Probar que G es resoluble si y sólo si H y $G \big/ H$ son resolubles.

19. Sean p y q primos distintos. Probar las siguientes afirmaciones:

    a) Todo grupo de orden pq es resoluble.
    b) Todo grupo de orden $p^2 q$ es resoluble.
    c) Si p y q son impares, todo grupo de orden $2pq$ es resoluble.
    d) Todo grupo de orden menor que 60 es resoluble.

20. Dado G un grupo finito, se define la sucesión de subgrupos $\left\{G^{(n)}\right\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ recursivamente de la siguiente manera:

$$\begin{cases} G^{(0)} & = & G \\ G^{(n+1)} & = & [G^{(n)}, G^{(n)}] \ \forall \ n \ \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Probar que G es resoluble si y sólo si existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $G^{(k)} = \{1\}$.