Álgebra II
Práctica 1

1. Sea G un grupo. Probar que el neutro y los inversos de cada elemento son únicos.

2. Probar que un semigrupo con neutro a izquierda y tal que todo elemento es inversible a izquierda es un grupo.

3. En el conjunto $C_n = \{g^0; g^1; \ldots; g^{n-1}\}$ se define la operación $g^i.g^j = g^{r_n(i+j)}$. Probar que C_n es un grupo. ¿Qué relación tiene con $\mathbb{Z}_n$?

4. Sea $n \in \mathbb{N}$ y sea $G_n = \{z \in \mathbb{C} / z^n = 1\}$.

   a) Probar que $(G_n\,,\,\cdot)$ es un grupo abeliano y hallar z^{-1} para cada $z \in G_n$.

   b) Probar que G_n es cíclico.

5. Sea $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \,/\, |z| = 1\}$.

   a) Probar que $(S^1, \cdot)$ es un grupo abeliano y hallar z^{-1} para cada $z \in S^1$.

   b) Determinar si S^1 es cíclico.

6. En cada uno de los siguientes casos determinar si $(G, *)$ es un grupo, monoide o semigrupo. Si es grupo, determinar si es abeliano y si es monoide, hallar su grupo de unidades:

   a) $G = \mathbb{N}_0 \qquad a * b = [a, b]$.

   b) $G = \mathbb{Q}_{>0} \qquad a * b = a \cdot b$.

   c) $G = M_3(\mathbb{Z}) \qquad a * b = a \cdot b$.

   d) $G = M_n(\mathbb{R}) \qquad a * b = a + b$.

   e) $G = SL_n(\mathbb{R}) = \{a \in M_n(\mathbb{R}) \,/\, det\ a = 1\} \qquad a * b = a \cdot b$.

   f) $G = End_K(V)$, con V un K-espacio vectorial $\qquad f * g = f \circ g$.

   g) $G = \{f \in End_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n) \,/\, d(f(x), f(y)) = d(x, y)\ \forall\, x, y \in \mathbb{R}^n\} \qquad f * g = f \circ g$.

   h) $G = T_n\{a \in M_n(\mathbb{R}) \,/\, a_{ij} = 0\ \forall\, i > j\} \qquad a * b = a.b$

   i) $G = Aut_K(V) \qquad f * g = f \circ g$

   j) $G = \{f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n \,/\, f(x) = Ax + b,\ A \in GL(n, \mathbb{K}),\ b \in \mathbb{K}^n\} \qquad f * g = f \circ g$

   k) $G = S(X) = \{f : X \longrightarrow X \,/\, f \text{ es biyectiva}\}$, donde X es un conjunto no vacío y $f * g = f \circ g$.

   Notación: Cuando $X = \{1, \ldots, n\}$ $S(X)$ será notado S_n.

   l) $G = S(\mathbb{Z}) \qquad f * g = f \circ g^{-1}$.

m) $G = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \qquad (a,b)*(c,d) = (r_2(a+c), r_2(b+d))$.

n) $G = \mathcal{U}_n = \{a \in \mathbb{Z}_n \,/\, (a,n) = 1\} \qquad a * b = r_n(a \cdot b)$.

ñ) $G = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \qquad (a,b)*(a',b') = (a+a', b+b'+aa')$

o) $G = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \qquad (a,b,c)*(a',b',c') = (a+a', b+b'+aa', c+c'+(a^2-2b)a')$

7. Probar que

   a) $G_n \subseteq G_m$ si y sólo si $n \mid m$.

   b) $G_n \cap G_m = G_{(n,m)}$.

8. En cada uno de los siguientes casos, probar que H es un subgrupo de $(G,*)$:

   a) $G = \mathbb{C}^* \qquad * = \cdot \qquad H = S^1$.

   b) $G = D_4 \qquad * = \circ \qquad H = \{1, \rho, \rho^2, \rho^3\}$.

   c) $G = GL_2(\mathbb{C}) \qquad * = \cdot \qquad H = \mathcal{H}$.
   donde $\mathcal{H} = \left\{ \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \right\}$.

   d) $G = S^1 \qquad * = \cdot \qquad H = G_n$.

   e) $G = \mathbb{Z}_{2n} \qquad a * b = a + b \qquad H = \{a \in G \,/\, a \text{ es par}\}$.

   f) $G = GL_n(\mathbb{R}) \qquad * = \cdot \qquad H = SL_n(\mathbb{R})$.

   g) $G = \{f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n \,/\, f(x) = Ax + b,\ A \in GL(n,\mathbb{K}),\ b \in \mathbb{K}^n\} \qquad f * g = f \circ g$, $H = \{f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n \,/\, f(x) = Ax + b,\ A \in S,\ b \in \mathbb{K}^n\}$, donde S es cualquier subgrpo de $GL(n,\mathbb{K})$.

   h) G del inciso *o*) del ejercicio 6, $\qquad H = \{(a,b,c)/abc = b^3 + c^2\}$.

9. Probar que todos los grupos de 4 elementos son abelianos (Sug: hacer las posibles tablas de operaciones).

10. Sea G un grupo y sean H_1 y H_2 dos subgrupos de G.

    a) Probar que $H_1 \cap H_2$ es un subgrupo.

    b) Probar que $H_1 \cup H_2$ es un subgrupo si y sólo si $H_1 \subset H_2$ o $H_2 \subset H_1$.

11. Hallar todos los subgrupos cíclicos de: $\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_5, \mathbb{Z}_6, G_3, G_4, S_3, \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3$.

12. Sean G un grupo y $a \in G$. Probar que $Z_a = \{x \in G;\ x \cdot a = a \cdot x\}$ es un subgrupo de G.

13. Probar que si H es un subgrupo de $\mathbb{Z}$ entonces existe $n \in \mathbb{N}_0$ tal que $H = n \cdot \mathbb{Z}$.

14. Probar que si H es un subgrupo finito de $\mathbb{C}^*$ entonces existe $n \in \mathbb{N}_0$ tal que $H = G_n$.

15. Sea $G_{p^\infty} = \{x \in S^1 / \exists n \in \mathbb{N} / x^{p^n} = 1\}$. Probar que

   a) Si H es un subrupo propio de G_{p^∞} entonces $H = G_{p^n}$ para algún $n \in \mathbb{N}$.

   b) Todo endomorfismo de G_{p^∞} es nulo o es un epimorfismo.

16. Sean $(G, \cdot)$ un grupo y $a, b \in G$

   a) Probar que las siguientes aplicaciones de G en G son biyectivas y encontrar sus inversas

      1) $x \longrightarrow a \cdot x$
      2) $x \longrightarrow a \cdot x \cdot b$
      3) $x \longrightarrow a \cdot x \cdot a^{-1}$
      4) $x \longrightarrow x^{-1}$
      5) $x \longrightarrow a \cdot x^{-1} \cdot a^{-1}$

   b) Determinar cuáles de estas aplicaciones son morfismos.

   c) Idem en el caso en que G sea abeliano.

17. Hallar $ord(x)$ en los casos:

   a) $G = S_8$ $\quad x = (1\ 2)(5\ 6\ 7)$.

   b) $G = \mathbb{Z}_{12}$ $\quad x = 2 \quad ; \quad x = 3 \quad ; \quad x = 4$.

   c) $G = \mathcal{H}$ $\quad x = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$.

   d) $G = S^1$ $\quad x = \cos(\frac{2\pi}{n}) + i\ \sin(\frac{2\pi}{n})$.

   e) $G = D_4$ $\quad x = \rho^2\, s$.

   f) G un grupo cualquiera y $x = a^d$, donde $a \in G$ es un elemento de orden n y d es un número natural.

   g) $G = S_n$, x un producto de ciclos disjuntos de longitudes $l_1, l_2, \cdots, l_k$.

18. Sea $f : G \longrightarrow G$ un morfismo de grupos. Probar que $ord(f(x))$ divide a $ord(x)$ si $ord(x)$ es finito.

19. Sea $x \in \mathbb{Z}_n$. Probar que $ord(x) = n$ si y sólo si $(x, n) = 1$.

20. a) Calcular el orden de todos los elementos de S_3.

   b) Sea $\sigma := (1\,3\,2)$, encontrar el subgrupo $Z_\sigma = \{r \in S_3;\ r.\sigma = \sigma.r\}$.

   c) Hallar, si existen, elementos de S_3 tales que sus centrlizadores tengan orden 1, 2, 3 ó 6.

21. *a*) Sea G un grupo y sean $x \in G$ e $y \in G$ tales que $[x, y] = 1$. Probar que $ord(xy) \mid [ord(x) : ord(y)]$.

b) Sean G_1 y G_2 grupos finitos. Probar que el orden de un elemento $(g_1, g_2) \in G_1 \oplus G_2$ es el mínimo común múltiplo entre los órdenes de los elementos g_1 y g_2

c) Probar que si n y m son coprimos $\mathbb{Z}_n \oplus \mathbb{Z}_m$ es cíclico.

d) Calcular el orden de cada elemento de $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3$ y de $\mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_6$.

22. Sea p un número primo, $m \in \mathbb{N}$ y sea G un grupo de orden p^m . Probar que existe un elemento de orden p en G .

23. Probar que en todo grupo de orden par existe un elemento de orden 2.

24. Probar que un grupo finito G es cíclico si y solo si G es isomorfo a C_n para algún $n \in \mathbb{N}$.

25. Determinar si G y K son isomorfos en los casos:

a) $G = \mathbb{Z}_4 \qquad K = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2.$

b) $G = \mathbb{Z}_n \qquad K = G_n.$

c) $G = \mathbb{Z}_{10} \qquad K = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_5.$

d) $G = \mathbb{Q} \qquad K = \mathbb{R}.$

e) $G = \mathcal{U}_{16} \qquad K = \mathcal{H}.$

f) $G = \mathcal{U}_{16} \qquad K = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4.$

26. Dados los grupos:

$$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \qquad \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4 \qquad \mathbb{Z}_2 \oplus G_4 \qquad \mathbb{Z}_8$$

$$D_4 \qquad G_8 \qquad \mathcal{H} \qquad \mathcal{K}$$

donde $\mathcal{K} = \{1, i, j, k, -1, -i, -j, -k\}$ con $i^2 = j^2 = -1$ y $i \cdot j = k = -j \cdot i$

Decidir cuáles son isomorfos entre sí.

27. Sea $f : G \longrightarrow L$ un epimorfismo. Decidir para cuáles P_i vale:

“ G satisface $P_i \Rightarrow L$ satisface P_i "

(P_1) tener n elementos.

(P_2) ser finito.

(P_3) ser conmutativo.

(P_4) ser no conmutativo.

(P_5) ser cíclico.

(P_6) todo elemento tiene orden finito.

(P_7) todo elemento tiene orden 6.

(P_8) todo elemento tiene orden infinito.

28. Sea $f : G \longrightarrow L$ un monomorfismo. Decidir para cuáles P_i del ejercicio anterior vale: "L verifica $P_i \Rightarrow G$ verifica P_i".

29. a) Probar que $Aut(\mathbb{Z}) \simeq G_2$.

    b) Hallar $Hom(G_n\,, \mathbb{Z})$.

    c) Hallar $Hom(G\,, \mathbb{Z})$ para G un grupo de orden finito.

30. Sea $G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & a \end{pmatrix} / \, a, b \in \mathbb{Z}_7, \text{ con } a \neq 0 \right\}$.

    a) Hallar el orden de G.

    b) Para cada primo p que divide al orden de G hallar todos los elementos de G que tengan orden p.

31. Probar que $\{2,\, 3\}$ es un sistema de generadores de $\mathbb{Z}$.

32. Sea $G = M_2(\mathbb{Z}_2)$. Hallar $|G|$ y encontrar subgrupos de G de orden 2, 4 y 8.

33. a) Probar que son equivalentes:

    1) G es abeliano.

    2) La aplicación $f : G \longrightarrow G$ definida por $f(x) = x^{-1}$ es un morfismo de grupos.

    3) La aplicación $f : G \longrightarrow G$ definida por $f(x) = x^2$ es un morfismo de grupos.

    b) Probar que si $x^2 = 1$ para todo $x \in G$ entonces G es abeliano y que, si además G es finito, $|G| = 2^n$ para algún $n \in \mathbb{N}$.

34. Probar que

    a) $Hom(\mathbb{Z}\,, \mathbb{Z}_n) \neq 0$.

    b) $Hom(\mathbb{Z}_5\,, \mathbb{Z}_7) = 0$.

    c) $Hom(\mathbb{Q}\,, \mathbb{Z}) = 0$.

    d) $Hom(\mathbb{Z}_n\,, \mathbb{Z}) = 0$.

    e) No existe un epimorfismo de $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.

35. Hallar dos grupos G y K no isomorfos tales que $Aut(G) \simeq Aut(K)$.

36. Sea $G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \,/\, a, b \in \mathbb{Z}_4, \text{ con } (a,4) = 1 \right\}$. Probar que G es un grupo no abeliano de orden 8. ¿Es $G \simeq \mathcal{H}$? ¿Es $G \simeq D_4$?

37. Caracterizar todos los grupos de orden ≤ 5. Observar que son todos abelianos.