# Álgebra II
## Práctica 2

Sea $G$ un grupo y sean $X, Y$ subconjuntos no vacíos de $G$. Se define

$$X \cdot Y = XY = \{x \cdot y : x \in X,\, y \in Y\}.$$

Si $x \in G$ escribimos $xH := \{x\}H$.

1. Sea $G$ un grupo y $H$ y $K$ subgrupos.

   *a*) ¿ Será cierto que si $H$ y $K$ son subgrupos de $G$ entonces $HK$ es subgrupo de $G$?

   *b*) Probar que si $H$ ó $K$ es normal entonces $HK$ es subgrupo, y que además $HK = KH$.

   *c*) Si $H$ y $K$ son subgrupos normales entonces $HK = KH$ es un subgrupo invariante de $G$. Hallar $|HK|$ (sugerencia: considere la función de conjuntos $H \times K \to HK$ que asigna a un par $(h,k)$ el producto $hk$).

2. Decidir cuáles de los subgrupos del ejercicio 8 de la práctica 1 son invariantes.

3. ¿Es $[G,G]$ un subgrupo invariante de $(G,*)$ para todo grupo $(G,*)$?

4. Dados los siguientes subgrupos de $S_4$

   $K = \{id,\ (1\ 2)(3\ 4),\ (1\ 3)(2\ 4),\ (1\ 4)(2\ 3)\}$ $\quad H = \{id,\ (1\ 2)(3\ 4)\}$ $\quad U = <(1\ 2\ 3\ 4)>$

   *a*) Determinar si $U \triangleleft S_4$.

   *b*) Probar que $H \triangleleft K$, $K \triangleleft A_4$ y $K \triangleleft S_4$.

   *c*) Probar que $H$ no es invariante en $A_4$ ni en $S_4$.

5. Encontrar todos los subgrupos invariantes de $G$.

   *a*) $G = D_n$, $n$ impar.

   *b*) $G = D_n$, $n$ par.

   *c*) $G = \mathcal{H}$ el grupo de los cuaterniones.

   *d*) $G$ un grupo abeliano.

6. Sea $G$ un grupo y $H$ un subgrupo tal que $|G : H| = 2$. Probar que $H \triangleleft G$.

7. Hallar un sistema de representantes de $G$ módulo $S$ en los siguientes casos y determinar $|G : S|$

   *a*) $G = \mathbb{R}$ $\qquad S = \mathbb{Z}$.

*b*) $G = GL(n, \mathbb{K}) \qquad S = SL(n, \mathbb{K})$ donde $\mathbb{K} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$.

*c*) $G = D_n \qquad S = < r >$.

*d*) $G = \mathbb{C}^* \qquad S = S^1$.

*e*) $G = \mathbb{C}^* \qquad S = \mathbb{R}_{>0}$.

*f*) $G = \mathbb{C}^* \qquad S = \mathbb{R}^* \cup \mathbb{R}^* i$.

8. Sea $G$ un grupo. Sea $a \in G$ y sea $I_a : G \longrightarrow G$ definida por $I_a(g) = a.g.a^{-1}$.

   *a*) Probar que $I_a$ es un automorfismo de $G$ (se denomina automorfismo interior de $G$). Se define $Int(G) := \{I_a : a \in G\}$.

   *b*) Probar que $Aut(G)$ es un grupo con la composición.

   *c*) Probar que la aplicación $I : G \longrightarrow Aut(G)$ es un morfismo de grupos y verificar que

$$\ker(I) = \{a \in G \,:\, ag = ga, \forall g \in G\}$$

   Este subgrupo se llama el *centro* de $G$ y se nota $\mathcal{Z}(G)$.

   Deducir que $G/_{\mathcal{Z}(G)} \simeq Int(G)$.

   Probar que $Int(G)$ es un subgrupo invariante de $Aut(G)$.

9. Sea $G$ un grupo y $H$ un subgrupo. Probar que $[G;G] \subseteq H \Leftrightarrow H \triangleleft G$ y $G/H$ es abeliano.

10. Calcular todos los cocientes de $S_3$, $D_4$ y $\mathcal{H}$.

11. Probar que

   *a*) $\mathbb{C}^*/_{\mathbb{R}_{>0}} \simeq S^1$

   *b*) $\mathbb{Z}/_{m \cdot \mathbb{Z}} \simeq \mathbb{Z}_m$

   *c*) $GL_n(\mathbb{C})/_{SL_n(\mathbb{C})} \simeq \mathbb{C}^*$

   *d*) $\mathbb{Q}^*/_{\mathbb{Q}_{>0}} \simeq G_2$

   *e*) $S^1/_{G_n} \simeq S^1$

   *f*) Si $m \mid n$ entonces $G_n/_{G_m} \simeq G_{\frac{n}{m}}$

12. *a*) Sea $f : G \longrightarrow G'$ un epimorfismo y sea $H \triangleleft G$. Si $H' = f(H)$, probar que

   1) $H' \triangleleft G'$

   2) $G/_{\mathrm{H}} \simeq G'/_{\mathrm{H'}}$

   *b*) ¿Qué pasa si $f : G \longrightarrow G'$ es un isomorfismo, $g : H \longrightarrow H'$ es un isomorfismo, $H \triangleleft G$, $H' \triangleleft G'$ con $G/_{\mathrm{H}}$ y $G'/_{\mathrm{H'}}$?

13. Probar que los únicos grupos no abelianos de orden 8 son $\mathcal{H}$ y $D_4$.

14. Si $|G| = 2p$ entonces $G$ es abeliano o $G \simeq D_p$.

15. Decidir cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuáles falsas

   *a*) Si $|G : H| = 2$ y $H$ es abeliano entonces $H \subset \mathcal{Z}(G)$.

   *b*) Si $|G| = n$ y $k$ divide a $n$, existe un elemento de orden $k$.

   *c*) Si $|G| = n$ y $k$ divide a $n$, existe un subgrupo de orden $k$.

   *d*) Si $\forall x \in G$, se tiene que $ord(x) < \infty \Rightarrow |G| < \infty$.

   *e*) Si $p/|G|$, entonces existe $H$ subgrupo tal que $|G : H| = p$.

   *f*) Los elementos de orden finito de un grupo $G$ forman un subgrupo.

16. Sea $G$ un grupo y $X$ un conjunto no vacío. Notamos $Func(X, G)$ al conjunto de funciones de $X$ en $G$.

   *a*) Probar que $Func(X, G)$ es un grupo con la multiplicación punto a punto.

   *b*) Sean $x \in X$ y $g \in G$. Sea $H_{x,g} = \{f \in Func(X, G) : f(x) = g\}$. ¿Es $H_{x,g}$ un subgrupo de $Func(H, G)$?.

   *c*) Dado $Y \subset X$, definimos $H_Y = \{f \in Func(X, G) : f(y) = 1 \forall y \in Y\}$. Probar que $H_Y$ es un subgrupo invariante.

   *d*) Probar que $Func(X, G) \big/ H_Y \simeq Func(Y, G)$.

   *e*) Sea $H$ otro grupo. Consideramos $Hom(H, G)$ el subconjunto de $Func(H, G)$ formado por las funciones que son además morfismos de grupos. ¿Es $Hom(H, G)$ un subgrupo de $Func(H, G)$? ¿Y si $G$ es abeliano?

17. Probar que $D_n$ es isomorfo al grupo generado por dos elementos $x, y$ sujetos a las relaciones $x^2 = y^2 = (xy)^n = 1$ (Notación: $D_n \simeq < x, y \mid x^2 = y^2 = (xy)^n = 1 >$).

18. Hallar todos los grupos finitos generados por dos elementos de orden 2.

19. Sea $G$ un grupo finito y $H \subset G$ un subgrupo propio. Probar que $\bigcup_{g \in G} gHg^{-1} \subsetneq G$.