1^{er} *cuatrimestre 2006*

ÁLGEBRA II

Práctica 3

1. Si $G \simeq H._d K$ con H y K abelianos, entonces G es abeliano.

2. Probar que S_n y D_n ; $n \geq 3$ son isomorfos a productos semidirectos no triviales convenientes.

3. ¿ Es $\mathcal{H}$ isomorfo a algún producto semidirecto no trivial?

4. En qué casos es S es un factor semidirecto de G. En los casos que lo sea encontrar un complemento y describir el isomorfismo.

   a) $G = \mathbb{C}^*$ $\quad S = S^1$

   b) $G = G_{12}$ $\quad S = G_3$

   c) $G = \mathbb{C}$ $\quad S = \mathbb{R}$

   d) $G = GL(n, \mathbb{C})$ $\quad S = SL(n, \mathbb{C})$

   e) $G = G_{12}$ $\quad S = G_2$

   f) $G = S_4$ $\quad S = \{1; (12)(34); (13)(24); (14)(23)\}$

   g) S_n $\quad S = \{1; (12)\}$

5. Sea G un grupo. Se define $Hol(G) = G \rtimes_\Phi Aut(G)$, donde $\Phi : Aut(G) \to Aut(G)$ es la identidad.

   a) Probar que G está identificado canónicamente con un subgupo normal de $Hol(G)$ y deducir que, vía tal identeficación, $Hol(G)$ actúa sobre G por conjugación.

   b) $\{f|_G : G \to G / f \in Int(Hol(G))\} = Aut(G)$.

   c) Concluir que todo automorfismo de G corresponde a conjugar por un elemenmto de un grupo más grande (los automorfismos interiores de $Hol(G)$ cubren $Aut(G)$).

6. Probar en cada uno de los siguientes casos que el grupo G actúa sobre el conjunto X. En cada caso calcular X^G, las G-órbitas de X y el estabilizador de cualquier elemento de X.

   a) $G = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax + b \text{ con } a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R}\}$, $X = \mathbb{R}$ y $f.x = f(x)$

   b) $G = \mathbb{R}^*$, $X = \mathbb{R}_{>0}$ y $a.x = x^a$ con $a \in \mathbb{R}^*$ y $x \in \mathbb{R}_{>0}$.

   c) $G = SL(2, \mathbb{Z})$, $X = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ y $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (ax + by, cx + dy)$

7. Sea G un grupo actuando sobre un conjunto X y $S \triangleleft G$. Determinar la condición necesaria y suficiente para que exista una acción de G/S en X tal que $\bar{a} \cdot x = a \cdot x \quad \forall\, a \in G$ y $x \in X$.

8. Sea X un conjunto finito. Determinar el número de acciones de $\mathbb{Z}$ sobre X. Determinar cuántas de ellas son transitivas.

9. Sea G un grupo actuando sobre el conjunto $X = \{x_1; x_2; \dots x_n\}$ y sea $\mathbb{K}$ un cuerpo. Se define el espacio vectirial $\mathbb{K}X$ como el $\mathbb{K}$ espacio vectorial con base X. La acción de G se extiende naturalmente a $\mathbb{K}X$. Sea $\Lambda = \sum_{g \in G} g$. Definimos la transformación lineal $\lambda : \mathbb{K}X \to \mathbb{K}X$, $\lambda(v) = \Lambda \cdot v$. Calcular la traza de λ y probar que $tr(\lambda) = \sum_{g \in G} \# X^g = \sum_{x \in X} Z_x$. Deducir el lema de Burnside.

10. Sea G un grupo.

    a) Probar que si $|G| = p^n$ con p primo y $n \in \mathbb{N}$ entonces $\mathcal{Z}(G) \neq 1$.

    b) Probar que si $G/_{\mathcal{Z}(G)}$ es cíclico entonces G es abeliano.

    c) Probar que si $|G| = p^2$ con p primo entonces G es abeliano.

    d) Caracterizar todos los grupos de orden p^2.

    e) Dar un ejemplo de un grupo G no abeliano tal que $G/_{\mathcal{Z}(G)}$ sea abeliano.

11. Sea G un grupo no abeliano tal que $|G| = p^3$. Probar que $\mathcal{Z}(G) = [G; G]$ y calcular $|\mathcal{Z}(G)|$.

12. Sea G un grupo tal que $|G| = 2n$, G tiene n elementos de orden 2 y los restantes forman un subgrupo H. Probar que entonces n es impar y $H \triangleleft G$. ¿Es necesariamente G isomorfo a D_n?

13. Sea p primo. Entonces $|G| = p^k$ para algún $k \in \mathbb{N}$ si y sólo si $\forall\, x \in G,\ \exists\, s \in \mathbb{N}_0$ tal que $ord(x) = p^s$.

14. G es un p-grupo $\Leftrightarrow$ $\forall H \triangleleft G$, H y G/H son p-grupos.

15. Calcular todos los p- subgrupos de Sylow de:

$$\mathbb{Z}_2\,, \mathbb{Z}_{12}\,, \mathbb{Z}_{21} \oplus \mathbb{Z}_{15}\,, S_3 \oplus \mathbb{Z}_3\,, S_3 \oplus S_3$$

16. Sea G un grupo, $|G| = pq$, $p > q$ primos tal que q no divide a $p-1$. Probar que G es cíclico.

17. Sean p, q primos , $|G| = p^2 q$. Probar que G no es simple.

18. Probar que no existen grupos simples de los siguientes órdenes:

    $30, 36, 56, 96, 200, 204, 260, 2540, 9075$.

19. Sea G con $|G| < \infty$ y $p < q$ primos tal que p^2 no divide a $|G|$. Sean H_p y H_q subgrupos de Sylow de G con $H_p \triangleleft G$. Probar

a) $H_p.H_q$ es subgrupo de G

b) $H_p.H_q \lhd G \Rightarrow H_q \lhd G$.

20. Sean p y q primos. Determinar el número de estructuras de grupo de orden pq.

21. Sean p y q primos impares tales que $p < q$ y que p no divide a $q-1$. Determinar el número de estructuras de grupo de orden $2pq$.

22. Probar que existe una única estructura no abeliana de producto semidirecto de orden p^3 tal que todo elemento tiene orden p.

23. Sea G un grupo y sea $H \lhd G$. Probar que G es resoluble si y sólo si H y $G/_{H}$ son resolubles.

24. Sean p y q primos distintos. Probar las siguientes afirmaciones:

    a) Todo grupo de orden pq es resoluble.

    b) Todo grupo de orden p^2q es resoluble.

    c) Si p y q son impares, todo grupo de orden $2pq$ es resoluble.

    d) Todo grupo de orden menor que 60 es resoluble.

25. Dado G un grupo finito, se define la sucesión de subgrupos $\{G^{(n)}\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ recursivamente de la siguiente manera:

$$\begin{cases} G^{(0)} & = & G \\ G^{(n+1)} & = & [G^{(n)}, G^{(n)}] \ \forall\, n \ \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Probar que G es resoluble si y sólo si existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $G^{(k)} = \{1\}$.