1^{er} *cuatrimestre 2006*

Álgebra II
Práctica 4

1. Probar que los siguientes conjuntos, con las operaciones definidas, tienen estructura de anillo.

   a) $(A^{n\times n}, +, \cdot)$; matrices de $n \times n$, A anillo conmutativo.

   b) $(A[X_1, ..., X_n], +, \cdot)$; polinomios en n variables, A anillo conmutativo.

   c) $(End(G), +, \circ)$; G grupo abeliano, $+$ punto a punto y $\circ$ la composición de morfismos.

   d) $(A_1 \times \ldots \times A_n, +, \cdot)$; $A_1, \ldots, A_n$ anillos, suma y producto coordenada a coordenada.

   e) $(A^X = \{f : X \to A\}, +, \cdot)$; A anillo, X conjunto, $+$ y $\cdot$ punto a punto.

   f) $(\mathcal{P}(X), \triangle, \cap)$; X conjunto, $\triangle$ diferencia simétrica y $\cap$ intersección.

   g) $(\mathbb{Z}[G] = \{\sum_{g\in G} a_g \cdot g \ / \ a_g \in \mathbb{Z}\}, +, \cdot)$; G grupo, $(\sum_{g\in G} a_g \cdot g) + (\sum_{g\in G} b_g \cdot g) = \sum_{g\in G}(a_g + b_g)\cdot g$ y $(\sum_{g\in G} a_g \cdot g)\cdot(\sum_{g\in G} a_h \cdot h) = \sum_{g\in G}(a_g b_h)\cdot gh$.

   h) $(\mathbb{Z}[\sqrt{d}] = \{a + b\sqrt{d} \ / \ a, b \in \mathbb{Z}\}, +, \cdot)$; d entero libre de cuadrados, $+$ y $\cdot$ de $\mathbb{C}$.

   Decidir cuáles son conmutativos, cuáles son dominios íntegros, anillos de división, cuerpos.

2. Dar ejemplos de

   a) anillo de división que no sea cuerpo.

   b) anillo que no sea íntegro.

   c) anillo íntegro que no sea de división.

   d) dominio íntegro que no sea dominio principal.

3. Sea A un anillo con identidad 1

   a) Probar que $\mathcal{U}(A) = \{a \in A \ / \ a \text{ es inversible}\}$ es un grupo multiplicativo.

   b) Hallar $\mathcal{U}(\mathbb{Z}_m)$ para $m = 3, 4, 5, 6, 8$.

   c) ¿Cuál es el orden de $\mathcal{U}(\mathbb{Z}_m)$?

   d) ¿Es $\mathcal{U}(\mathbb{Z}_8) \simeq \mathcal{U}(\mathbb{Z}_5)$?

4. Sea $f : A \longrightarrow B$ un morfismo de anillos. Probar que

   a) $\text{im}(f)$ es un subanillo de B

   b) $\ker(f)$ es un ideal de A

   c) $A/\ker(f) \simeq \text{im}(f)$ (como anillos)

5. Sean A un anillo e $\mathcal{I}$ un ideal de A. Probar que hay una correspondencia biyectiva entre los ideales de $A/\mathcal{I}$ y los ideales de A que contienen a $\mathcal{I}$.

6. Sea A un anillo. Probar que A es un anillo de división si, y sólo si, los únicos ideales a izquierda de A son 0 y A.

7. Hallar todos los ideales de $\mathbb{Z}$. Concluir que $\mathbb{Z}$ es un dominio principal. Hallar todos los ideales primos de $\mathbb{Z}$.

8. Probar que si $\mathbb{K}$ es un cuerpo entonces $\mathbb{K}[X]$ es un dominio principal. ¿Es $\mathbb{Z}[X]$ un dominio principal?

9. Probar que en un anillo conmutativo todo ideal maximal es primo.

10. Probar que en un dominio principal todo ideal primo es maximal.

11. Sean A un anillo conmutativo e $\mathcal{I}$ un ideal de A. Probar que $\mathcal{I}$ es un ideal primo de A si y sólo si $A/\mathcal{I}$ es un dominio íntegro.

12. Sea A un anillo conmutativo y sea $\mathcal{M}$ un ideal de A. Probar que $\mathcal{M}$ es maximal si y sólo si $A/\mathcal{M}$ es un cuerpo.