1^0 *cuatrimestre 2006*

Álgebra II

Práctica 5

1. ¿Existe algún producto $\cdot$ que haga de $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$ un cuerpo? ($+$ es la suma usual)

2. Sea $A = \mathcal{C}[0,1]$ el anillo de funciones reales continuas definidas en $[0,1]$.

   a) ¿Hay divisores de cero en A?

   b) ¿Cuáles son los elementos inversibles en A?

3. Caracterizar el grupo de unidades de:

   $\mathbb{Z}$, $\mathbb{K}$ cuerpo, $\mathbb{Z}[i], \mathbb{Z}[\sqrt{-5}], B[X]$ con B dominio íntegro.

4. ¿Es $\det : M_n(A) \longrightarrow A$ un morfismo de anillos? ¿Y la traza?

5. Probar que un morfismo de anillos $f : A \to B$ es inyectivo, si y sólo si, para todo anillo C y morfismos, $g_1 : C \to A$ y $g_2 : C \to A$ se tiene que, si $f \circ g_1 = f \circ g_2$, entonces $g_1 = g_2$.

6. Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo y sea $f \in \mathbb{K}[X]$. Probar que $\mathbb{K}[X]/ < f >$ es un cuerpo, si y sólo si, f es irreducible en $\mathbb{K}[X]$. ¿Sigue valiendo esto si se reemplaza el cuerpo $\mathbb{K}$ por un anillo conmutativo A?

7. Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo. Probar que los únicos ideales biláteros de $M_2(\mathbb{K})$ son 0 y $M_2(\mathbb{K})$. ¿Es $M_2(\mathbb{K})$ un anillo de división?

8. Sea A un anillo. Probar que existe un subanillo $B \subset A$ tal que $B \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ para algún $n \in \mathbb{N}_0$.

9. Probar que todo morfismo de anillos que sale de un cuerpo es inyectivo.

10. Probar que si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es un morfismo de cuerpos entonces $f = id$.

11. Hallar todos los morfismos de cuerpos $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ que satisfacen $f(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}$.

12. Probar que $\mathbb{Z}[X]/ < X^2 + 1 > \simeq \mathbb{Z}[i]$

13. Probar que $\mathbb{Z}[i]/ < 1 + i > \simeq \mathbb{Z}_2$ y caracterizar el anillo cociente $\mathbb{Z}[i]/ < 1 + 2i >$.

14. Sea $p \in \mathbb{Z}$ un primo. Probar que $\mathbb{Z}[X]/ < p > \simeq \mathbb{Z}_p[X]$.

15. Sea $p \in \mathbb{Z}$ un primo. Probar que $< p >$ es un ideal primo en $\mathbb{Z}[i]$ si, y sólo si, -1 no es un cuadrado en $\mathbb{Z}_p$.

16. Hallar las unidades de $\mathbb{Z}[X]/ < X^3 >$.

17. Probar que si $\mathcal{I}$ es un ideal primo de $\mathbb{Z}[X]$ entonces $\mathcal{I} \cap \mathbb{Z}$ es un ideal primo de $\mathbb{Z}$.

18. Sean A y B anillos conmutativos, $\mathcal{P}$ un ideal primo de B y $f : A \longrightarrow B$ un morfismo de anillos. Probar que $f^{-1}(\mathcal{P})$ es un ideal primo.

19. Caracterizar los anillos cocientes

$$\mathbb{Z}[X]/<2, X> \qquad \mathbb{Z}[X]/<2> \qquad \mathbb{Z}[X]/<2X> \qquad \mathbb{Z}[X]/<X^2>$$

$$\mathbb{Z}[X]/<X^2+1> \quad \mathbb{Z}[X]/<X^2+X+1> \quad \mathbb{Z}[i]/<2> \quad \mathbb{Z}[i]/<2, 1+i>$$

20. Mostrar isomorfismos de

    a) $\mathbb{Q}[X]/<X^3+X> \simeq \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}(i)$

    b) $\mathbb{R}[X]/<X^4-1> \simeq \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{C}$

21. Sean A un anillo conmutativo con unidad y A' un subanillo. Probar o dar contraejemplo:

    a) A cuerpo $\Rightarrow$ A' cuerpo

    b) A dominio íntegro $\Rightarrow$ A' dominio íntegro

    c) A' dominio íntegro $\Rightarrow$ A dominio íntegro

22. $A \subseteq B \subseteq C$ dominios íntegros. Buscar algún ejemplo en que A y C sean DFU, y B no lo sea.

23. Sea D un dominio de integridad finito. Probar que D es un cuerpo.

24. Probar que los siguientes son dominios euclídeos, exhibiendo en cada caso una norma euclídea.

    a) $\mathbb{Z}$, el anillo de los números enteros.

    b) $\mathbb{Z}[i]$, los enteros de Gauss.

    c) $\mathbb{K}[X]$, polinomios en una variable con coeficientes en $\mathbb{K}$.

    d) $\mathbb{K}[X, X^{-1}]$, polinomios de Laurent con coeficientes en $\mathbb{K}$.

    e) $\mathbb{K}[[X]]$, el anillo de series formales con coeficientes en $\mathbb{K}$.

    f) $\mathbb{K}$, un cuerpo.

25. Sean A dominio íntegro y $a \in A$. Probar que:

    a) a primo $\Rightarrow$ a irreducible

    b) A DFU, a irreducible $\Rightarrow$ a primo

26. Probar que si A es un DF tal que todo irreducible es primo, entonces A es DFU.

27. Probar que en $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ los números 3, 7, $4+\sqrt{-5}$, $1+2\sqrt{-5}$ y $1-2\sqrt{-5}$ son irreducibles y no primos. ¿Es $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ DFU ?, ¿Es DF?

28. Resolver en $\mathbb{Z}$ la siguente ecuación
$$x^3 - y^2 = 2$$

29. Sean A anillo conmutativo y $f \in A[X]$, $f \neq 0$. Probar que f es divisor de cero en $A[X]$ si, y sólo si, existe $r \in A \setminus \{0\}$ tal que $rf = 0$.

30. A dominio íntegro, I ideal propio de A; $\pi : A \longrightarrow A/I$ la proyección canónica. Sean $f = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \in A[X]$ mónico y $\bar{f} = \sum_{i=0}^{n} \pi(a_i) X^i \in A/I[X]$. Probar que:
f es reducible en $A[X]$ $\Rightarrow$ $\bar{f}$ es reducible en $(A/I)[X]$

31. **Criterio de irreducibilidad de Eisenstein:** Sea A un DFU y $\mathbb{K}$ su cuerpo de cocientes. Sea $f = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \in A[X]$. Supongamos que exista un primo $p \in A$ tal que:

    a) p no divide a a_n

    b) p divide a a_i, $0 \leq i \leq n-1$

    c) p^2 no divide a a_0

    Probar que f es irreducible en $\mathbb{K}[X]$

32. **Lema de Gauss:** Sea A un DFU y $\mathbb{K}$ su cuerpo de cocientes. Sea $f = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \in A[X]$ con $a_0 \neq 0$. Si p y q son elementos de A no nulos, coprimos entre sí tales que $\frac{p}{q} \in \mathbb{K}$ es raíz de f, demostrar que p/a_0 y q/a_n en A.

33. Probar que todo **ideal primo** de $\mathbb{Z}[X]$ es alguno de los siguientes:

    a) $< p >$ ó $< p, f >$ con $p \in \mathbb{Z}$ primo, $f \in \mathbb{Z}[X]$ tal que $\bar{f} \in \mathbb{Z}_p[X]$ es irreducible.

    b) $< f >$ donde f es primitivo e irreducible en $\mathbb{Q}[X]$

34. Sean $\mathbb{K}$ un cuerpo y $f, g \in \mathbb{K}[X_1, \ldots, X_n]$. Probar que:

    a) $f + g = 0$ ó $\mathrm{gr}(f+g) \leq \max\{\mathrm{gr}(f), \mathrm{gr}(g)\}$

    b) $fg = 0 \Rightarrow f = 0$ ó $g = 0$. (Es decir, $\mathbb{K}[X_1, \ldots, X_n]$ es un dominio íntegro)

    c) $\mathrm{gr}(fg) = \mathrm{gr}f + \mathrm{gr}g$. (Sug: descomponer a f y g en suma de polinomios homogéneos.)

d) Cuáles son los elementos inversibles de $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$?

e) Probar que $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ tiene estructura de $\mathbb{K}$-espacio vectorial y exhibir una base.

f) Un polinomio de grado d en una variable tiene, a lo sumo, $d+1$ coeficientes no nulos o monomios. Cuántos coeficientes no nulos puede tener un polinomio de grado d en 2 variables?

g) Cuántos coeficientes no nulos puede tener un polinomio homogéneo de grado d en n variables?

h) Cuántos coeficientes no nulos puede tener un polinomio cualquiera de grado d en n variables?

i) Cuál es la dimensión del $\mathbb{K}$-espacio vectorial $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]_{\leq d} = \{f \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n] : f = 0 \text{ ó } \operatorname{gr} f \leq d\}$?

35. Caracterizar los anillos cocientes:

$$\mathbb{R}[X,Y,Z]/_{< X, Y >} \qquad \mathbb{R}[X,Y,Z]/_{< X - Y^5 >} \qquad \mathbb{R}[X,Y,Z]/_{< Y - Z^3, Z - X^3 >}$$

36. Mostrar que $X^2 + Y^2 - 1$ y $XT - YZ$ son irreducibles en $\mathbb{Q}[X,Y]$ y $\mathbb{Q}[X,Y,Z,T]$ respectivamente.

37. Sea $I = < Y + X^2 - 1, XY - 2Y^2 + 2Y > \subset \mathbb{R}[X,Y]$. Decidir si $\mathbb{R}[X,Y]/I$ es un cuerpo.