1° cuatrimestre de 2006

Álgebra II
Práctica 7

Sistemas de generadores.

1. Probar que

   a) Todo módulo de tipo finito posee un sistema de generadores minimal.

   b) Para todo $n \in \mathbb{N}$ existe en $\mathbb{Z}$ un sistema de generadores minimal con n elementos.

2. Sea A un dominio íntegro y sea $a \in M_n(A)$. Sea $v_j = (a_{1j}, \dots, a_{nj}) \in A^n$. Probar que

   a) $\{v_1, \dots, v_n\}$ es linealmente independiente si y sólo si $det(A) \neq 0$.

   b) $\{v_1, \dots, v_n\}$ es un sistema de generadores de A^n si y sólo si $det(A) \in \mathcal{U}(A)$.

Sumas directas.

3. Probar que no existe un epimorfismo de grupos

   a) de $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ en $\mathbb{Z}_{p^\infty} \oplus \mathbb{Z}_p$

   b) de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{Z}_{p^\infty} \oplus \mathbb{Z}_{p^\infty}$

   c) de $\mathbb{Q}/_{\mathbb{Z}}$ en $\mathbb{Z}_{p^\infty} \oplus \mathbb{Z}_n$

4. Sea p un primo. Probar que no existe una sección

   a) de $\mathbb{Z}_p$ en $\mathbb{Z}_{p^2} \oplus \mathbb{Z}_{p^2}$

   b) de $\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p$ en $\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_{p^2}$

   c) de $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_p$ en $\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_{p^2}$

5. Calcular

   a) $Hom(\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}_n \, , \mathbb{Z}_p)$

   b) $Hom(\bigoplus_{p\, primo} \mathbb{Z}_p \, , G_3)$

6. Sea G un grupo abeliano y sean S y T subgrupos de G tales que $G \cong S \oplus T$. Probar que si existe un monomorfismo de $\mathbb{Q}$ en G entonces existe un monomorfismo de $\mathbb{Q}$ en S o existe un monomorfismo de $\mathbb{Q}$ en T.

7. *a*) Sea $e : \mathbb{Z}_n \longrightarrow \mathbb{Z}_n$ un morfismo de grupos. Probar que e es un proyector si y sólo si $\exists\, a \in \mathbb{Z}_n$ tal que $n \mid a^2 - a$ y $e(x) = a.x$ para todo $x \in \mathbb{Z}_n$

b) Sea $a \in \mathbb{Z}_n$, sea $f : \mathbb{Z}_n \longrightarrow \mathbb{Z}_n$ el morfismo definido por $f(x) = a.x$ y sea $d = (a, n)$. Probar que $Ker(f) =< \frac{n}{d} >$ y que $Im(f) =< d >$

c) Sean $n, d \in \mathbb{Z}$. Probar que si $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r}$, con $p_1, \dots, p_r$ primos positivos distintos y $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{N}$ entonces $d = (a, n)$ para algún $a \in \mathbb{Z}$ tal que n divide a $a^2 - a$ si, y sólo si, $d = p_1^{\beta_1.\alpha_1} \dots p_r^{\beta_r.\alpha_r}$ con $\beta_i \in \mathbb{N}_0$, $0 \leq \beta_i \leq 1$

d) Encontrar los sumandos directos de $\mathbb{Z}_n$ y, para cada uno de ellos, determinar un suplemento

Anillos y módulos noetherianos y artinianos.

8. Sea A un anillo e I un ideal bilátero. Probar que si A es un anillo noetheriano entonces A/I también lo es.

9. Probar que los ideales de $M_n(A)$ están en correspondencia biyectiva con los A-submódulos de A^n. Deducir que si A es un anillo noetheriano, $M_n(A)$ también.

10. Sean A un anillo conmutativo y $S \subset A$ multiplicativamente cerrado con $1 \in S$. Probar que si A es noetheriano entonces A_S es noetheriano.

11. Sean G un grupo finito y $\mathbb{K}$ un cuerpo. Probar que $\mathbb{K}[G]$ es noetheriano y artiniano.

12. Dar un ejemplo de

    a) Un A-módulo finitamente generado que no sea noetheriano.

    b) Un A-módulo tal que todo submódulo propio sea finitamente generado y que no sea noetheriano.

13. Probar que G_{p^∞} es un $\mathbb{Z}$-módulo artiniano y no noetheriano.

14. Probar que

    a) Un $\mathbb{K}$-espacio vectorial V es noetheriano si y sólo si $dim_{\mathbb{K}}(V) < \infty$.

    b) $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{K}[X]$ son anillos noetherianos.

    c) $\mathbb{K}[X_1, X_2, \cdots X_n]$ es un anillo noetheriano.

    d) Sea $d \in \mathbb{Z}$ libre de cuadrados. Probar que $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ es un anillo noetheriano.

Torsión.

15. Sea A un anillo y M un A-módulo. Decidir si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa:

a) Si M es libre, entonces es sin torsión.

b) Si A es íntegro entonces M libre $\Rightarrow$ M sin torsión.

c) Si $f : M \longrightarrow N$ es un morfismo de A-módulos y M es de torsión entonces $Im(f)$ es de torsión.

d) Si $f : M \longrightarrow N$ es un morfismo de A-módulos y M es sin torsión entonces $Im(f)$ es sin torsión.

e) Si A es conmutativo y N es sin torsión entonces $Hom_A(M, N)$ es sin torsión.

f) Si A es conmutativo, M es de torsión y N es sin torsión entonces $Hom_A(M, N) = 0$.

16. Calcular $t\left(\mathbb{R}/\mathbb{Z}\right)$.

17. Sea A un dominio principal que no es un cuerpo y sea M un A-módulo. Probar:

a) Sea $p \in A$ un irreducible y $a \in A - \{0\}$. Entonces $(A/<a>)[p] \simeq A/<p^n>$ donde $n = \max\{k \in \mathbb{N}_0 \;/\; p^k | a\}$.

b) M es simple $\iff$ $\exists\, p \in A$ irreducible tal que $M \simeq A/<p>$.

c) M es un A-módulo sin torsión $\iff$ $Hom_A(S, M) = 0$ para todo A-módulo simple S.

18. Sea A un dominio principal y sea M un A-módulo de tipo finito (es decir finitamente generado). Probar:

a) M es de torsión $\iff$ $Hom_A(M, A) = 0$.

b) M es indescomponible (es decir, no tiene sumandos directos propios) $\iff$ $M \simeq A$ o $\exists\, p \in A$ irreducible y $n \in \mathbb{N}$ tales que $M \simeq A/<p^n>$.

19. Sea A un dominio principal y sea M un A-módulo. Probar:

a) Si M es de tipo finito y S es un submódulo libre de M tal que M/S es sin torsión, entonces M es libre.

b) Si M no es de torsión y M/S es de tipo finito con torsión para todo submódulo $S \neq 0$ de M, entonces $M \simeq A$. Análogamente, si G es un grupo infinito tal que todo subgrupo no nulo tiene índice finito, $G \simeq \mathbb{Z}$.

Producto tensorial.

20. Sea M un A-módulo. Probar que $A \otimes_A M \cong M$.

21. Sean $\{M_i : i \in I\}$ y N A-módulos. Probar que $(\oplus_i M_i) \otimes N \cong \oplus_i (M_i \otimes N)$.

22. Sea A conmutativo y $S \subset A$ un conjunto multiplicativamente cerrado que contiene a 1. Probar que $A_S \otimes_A M \cong M_S$.

23. Sea I un ideal de A. Probar que $A/I \otimes_A M \cong M/IM$.