Álgebra II
Práctica 8

Teorema de estructura para dominios de ideales principales

1. Sea p un primo positivo. Clasificar todos los grupos abelianos de orden p^3, p^4 y p^5.

2. Clasificar los grupos abelianos de orden 18, 45, 100 y 180.

3. *a*) Sea G un grupo abeliano finito y sea p un primo positivo que divide al orden de G. Probar que el número de elementos de orden p en G es coprimo con p.

   b) Para cada grupo abeliano G de orden p^2q^2 (donde p y q son primos distintos) determinar cuántos elementos de orden pq y cuántos elementos de orden pq^2 hay en G.

4. Caracterizar los grupos abelianos finitamente generados tales que:

   a) Todo subgrupo propio de G es cíclico.

   b) Todo subgrupo propio de G es de orden primo.

   c) G posee exactamente 2 subgrupos propios no nulos.

   d) G posee exactamente 3 subgrupos propios no nulos.

   e) Todo subgrupo propio no nulo de G es maximal.

   f) Para todo par de subgrupos S y T de G, $S \subseteq T$ o $T \subseteq S$.

   g) El orden de todo elemento no nulo de G es primo.

   h) $G/_S$ es cíclico para todo subgrupo S no nulo de G.

   i) Todo par de subgrupos propios no nulos son isomorfos.

5. Calcular los factores invariantes (coeficientes de estructura) de los siguientes grupos abelianos:

   a) $\mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_6 \oplus \mathbb{Z}_9$.

   b) $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_8 \oplus \mathbb{Z}_{14}$.

   c) $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_{49} \oplus \mathbb{Z}$.

   d) $\mathbb{Z}_{12} \oplus \mathbb{Z}_{21} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_{20} \oplus \mathbb{Z}_9 \oplus \mathbb{Z}_7$.

   e) G un grupo abeliano de orden 36 que tiene exactamente 2 elementos de orden 3 y que no tiene elementos de orden 4.

   f) G un grupo abeliano de orden 225 que tiene por lo menos 40 elementos de orden 15 y tal que todo subgrupo de orden 9 de G es isomorfo a $\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3$.

6. Determinar los factores invariantes de los siguientes grupos abelianos dados por generadores y relaciones:

   a) $G =< a, b, c >; \quad 2a + 3b = 0; \quad 2a + 4c = 0$
   b) $G =< a, b, c >; \quad a = 3b; \quad a = 3c$
   c) $G =< a, b, c >; \quad 3a = -c; \quad 3a = 3c - 8b$
   d) $G ==< a, b, c >; \quad 3a = b; \quad b = 3c$

7. Calcular los coeficientes de estructura de los siguientes cocientes:

   a) $\mathbb{Z}^4/S$ con $S = \{m \in \mathbb{Z}^4 \ / \ m_1 + m_2 + m_3 + m_4 = 0, \ m_1 + m_2 - 2m_3 = 0\}$.
   b) $\mathbb{Z}^3/S$ con $S = \{m \in \mathbb{Z}^3 \ / \ m_1$ es par, $m_1 + 5m_2 - m_3 = 0\}$.
   c) $\mathbb{Z}^3/S$ con $S = \{m \in \mathbb{Z}^3 \ / \ m_1 = m_2 + m_3$ es par, $3|m_3\}$.

8. Sean p, q y r primos positivos. Determinar la cantidad de grupos no isomorfos de orden n, en cada uno de los siguientes casos:

   a) $n = p^6q^3r$.
   b) $n = p^2q^4r^5$.
   c) $n = p^3q^4$.

9. a) Sea G un grupo abeliano de orden n. Probar que si d es un divisor de n, G posee subgrupos y grupos cocientes de orden d.
   b) Sea $n \in \mathbb{N}$. ¿Para qué divisores d de n existe un grupo abeliano de orden n y exponente d?
   c) Caracterizar los grupos abelianos finitos de orden menor o igual que 100 de exponente 9, 20 y 21.
   d) Sea G un grupo abeliano y sea $x \in G$ un elemento tal que $\operatorname{ord}(x) = \exp(G)$. Probar que $< x >$ es un sumando directo de G.

10. Caracterizar todos los $\mathbb{Z}[i]$-módulos de 5, 6, 21 y 65 elementos.

11. Sea V un $\mathbb{C}$-espacio vectorial de dimensión finita, y $f : V \to V$ $\mathbb{C}$-lineal. Ver que el $\mathbb{C}[X]$-módulo inducido (V, f) es de torsión, y que cada bloques de Jordan de f se corresponde con un sumando directo en la descomposición de (V, f) que da el teorema de estructuras. Más aún, un bloque de tamaño n y autovalor λ se corresponde con un sumando de la forma $\mathbb{C}[X]/(X - \lambda)^n$.

12. Caracterizar los $\mathbb{R}[X]$-módulos de dimensión 1,2 y 3 sobre $\mathbb{R}$.

Teorema de estructura para anillos semisimples

13. Sea K un cuerpo. Probar que $K \times K$ es semisimple.

14. Probar que el anillo de matrices triangulares superiores con coeficientes en un cuerpo no es semisimple.

15. Descomponer $\mathbb{R}[C_3]$ y $\mathbb{R}[C_4]$ como producto de matrices con coeficientes en un álgebra de división sobre $\mathbb{R}$.

16. Descomponer $\mathbb{C}[C_n]$ y $\mathbb{C}[S_3]$ como producto de matrices con coeficientes en $\mathbb{C}$.

17. Sea G un grupo finito. Probar que $\mathbb{C}[G] \cong \prod_{i=1}^{r} M_{n_i}(\mathbb{C})$ con r igual a la cantidad de clases de conjugación de G.