
ÁLGEBRA II

Segundo Cuatrimestre — 2006

Práctica 2

Sea G un grupo y sean X, Y subconjuntos no vacíos de G . Se define

$$X \cdot Y = XY = \{x \cdot y : x \in X, y \in Y\}.$$

Si $x \in G$ escribimos $xH := \{x\}H$.

- Sea G un grupo y H, K subgrupos de G .
 - ¿Será cierto que si H y K son subgrupos de G entonces HK es subgrupo de G ?
 - Probar que si H ó K es invariante, entonces HK es un subgrupo.
 - Si H y K son invariantes, entonces HK es un subgrupo invariante.
- Decidir cuáles de los subgrupos del ejercicio 9 de la práctica 1 son invariantes.
- Sea G es un grupo abeliano. Probar que todos subgrupo es invariante.
Probar que el grupo \mathcal{H} es un contraejemplo para la recíproca de esta afirmación.
- Dados los siguientes subgrupos de S_4
$$H = \{id, (1\ 2)(3\ 4)\} \quad K = \{id, (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3)\}$$
$$U = \langle (1\ 2\ 3\ 4) \rangle$$
 - Probar que $H \triangleleft K$, $K \triangleleft A_4$ y $K \triangleleft S_4$
 - Probar que H no es invariante en A_4 ni en S_4
 - Determinar si $U \triangleleft S_4$
- Encontrar todos los subgrupos invariantes de G .
 - $G = D_n$, donde n es impar.
 - $G = D_n$, donde n es par.
 - $G = \mathcal{H}$.
 - G un grupo abeliano.
- Sean G y G' grupos y sea $f : G \rightarrow G'$ un morfismo. Probar que
 - $\ker(f) \triangleleft G$
 - ¿Es cierto que $\text{im}(f) \triangleleft G'$?
 - Recíprocamente si H es un subgrupo invariante de G , existe un grupo G' y un epimorfismo $f : G \rightarrow G'$ tal que $\ker(f) = H$.
- Sea G un grupo y H un subgrupo tal que $|G : H| = 2$. Probar que $H \triangleleft G$.

8. Hallar un sistema de representantes de G módulo S en los siguientes casos y determinar $|G : S|$

a) $G = \mathbb{R} \quad S = \mathbb{Z}$

b) $G = D_n \quad S = \langle \rho \rangle$

c) $G = GL_n(K) \quad S = SL_n(K) \quad \text{donde } K \text{ es un cuerpo.}$

d) $G = \mathbb{C}^* \quad S = S^1$

e) $G = \mathbb{C}^* \quad S = \mathbb{R}^* \cup \mathbb{R}^*i$

9. Calcular todos los cocientes de S_3, D_4 y \mathcal{H} .

10. Probar que

a) $\mathbb{C}^* / \mathbb{R}_{>0} \simeq S^1$

b) $\mathbb{Z} / m \cdot \mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}_m$

c) $\mathbb{Q}^* / \mathbb{Q}_{>0} \simeq G_2$

d) $S^1 / G_n \simeq S^1$

e) Si $m \mid n$ entonces $G_n / G_m \simeq G_{\frac{n}{m}}$

11. Verificar que $H \triangleleft G$ y calcular G/H

a) $G = S_4 \quad H = \{id, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}.$

b) $G = D_6 \quad H = \{1, \rho^3\}.$

c) G y H como en el ejercicio 8.

12. a) Sea $f : G \rightarrow G'$ un epimorfismo y sea $H \triangleleft G$. Si $H' = f(H)$, probar que

1) $H' \triangleleft G'$

2) $G/H \simeq G'/H'$

b) ¿Qué pasa si $f : G \rightarrow G'$ es un isomorfismo, $g : H \rightarrow H'$ es un isomorfismo, $H \triangleleft G, H' \triangleleft G'$ con G/H y G'/H'

13. Sea G un grupo y sean H, K subgrupos invariantes de G . Sean π_H y π_K las proyecciones de G en H y K respectivamente. Probar que la aplicación

$$f : G/(H \cap K) \rightarrow G/H \times G/K$$

definida por $f(\bar{x}) = (\pi_H(x), \pi_K(x))$ es un monomorfismo.

14. Sea G un grupo. Sea $a \in G$ y sea $I_a : G \rightarrow G$ definida por $I_a(g) = a \cdot g \cdot a^{-1}$.

a) Probar que I_a es un automorfismo de G (se denomina automorfismo interior de G).

- b) Probar que la aplicación $I : G \longrightarrow \text{Aut}(G)$ es un morfismo de grupos y verificar que

$$\ker(I) = \{a \in G : ag = ga, \forall g \in G\}$$

Este subgrupo se llama el centro de G y lo notamos $\mathcal{Z}(G)$.

Probar que $\text{im}(I)$ es un subgrupo invariante de $\text{Aut}(G)$.

Deducir que $G/\mathcal{Z}(G) \simeq \text{Int}(G)$.

15. Hallar $\mathcal{Z}(G)$ (el centro de G) en cada uno de los siguientes casos:

- | | |
|--|-----------------------|
| a) $G = D_n$ | d) $G = \mathcal{H}$ |
| b) $G = S_4$ | e) $GL_n(\mathbb{R})$ |
| c) $G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{Z}_3 \right\}$ | f) $SL_n(\mathbb{R})$ |

16. Sea G un grupo.

- a) Probar que $G/[G, G]$ es un grupo abeliano.
 b) Sea $f : G \rightarrow K$ un morfismo donde K es un grupo abeliano. Probar que f se factoriza unívocamente por $G/[G, G]$, esto es, existe un único morfismo $\bar{f} : G/[G, G] \rightarrow K$ tal que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{f} & K \\ \pi \downarrow & \nearrow \bar{f} & \\ G/[G, G] & & \end{array}$$

- c) Sea $H \subset G$ un subgrupo. Probar que
 $[G; G] \subseteq H \Leftrightarrow H \triangleleft G$ y G/H es abeliano.

17. Hallar $[G, G]$ en cada uno de los siguientes casos

- | | |
|----------------------|--|
| a) $G = D_n$ | c) $G = S_4$ |
| b) $G = \mathcal{H}$ | d) $G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{Z}_2 \right\}$ |

18. Probar que los únicos grupos no abelianos de orden 8 son \mathcal{H} y D_4 .

19. Sea p un primo mayor o igual que 3. Si $|G| = 2p$ entonces G es abeliano o $G \simeq D_p$.

20. Decidir cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuáles falsas

- a) Si $|G : H| = 2$ y H es abeliano entonces $H \subset \mathcal{Z}(G)$.
 b) Si $|G| = n$ y k divide a n , existe un elemento de orden k .
 c) Si $|G| = n$ y k divide a n , existe un subgrupo de orden k .
 d) Si $\forall x \in G$, se tiene que $\text{ord}(x) < \infty \Rightarrow |G| < \infty$.
 e) Si $p/|G|$, entonces existe H subgrupo tal que $|G : H| = p$.
 f) Los elementos de orden finito de un grupo G forman un subgrupo.