

---

# ÁLGEBRA II

## Segundo Cuatrimestre — 2006

### Práctica 3

---

En los siguientes ejercicios estudiamos productos semidirectos de grupos. Estos serán presentados de dos maneras.

La primera es dar  $H$  y  $K$  subgrupos de  $G$ , tales que  $H \triangleleft G$ ,  $H \cap K = \{1\}$  y  $G = HK$ .

Esta situación la notaremos  $G = H \cdot_{sd} K$ .

La segunda es dar grupos  $K$  y  $H$  y un morfismo de grupos  $\varphi : K \rightarrow \text{Aut}(H)$ . Se define entonces una operación en  $H \times K$  como  $(h, k)(h', k') = (h\varphi(k)(h'), kk')$ .

En este caso notaremos  $G = H \times_{\varphi} K$  al producto semidirecto.

En las clases teóricas se probó que estas construcciones son equivalentes. Se sugiere releer las clases y entender cómo es el pasaje entre las dos construcciones.

1. Sea  $G$  un grupo y sean  $H$  y  $K$  subgrupos de  $G$  tales que  $G = H \cdot_{sd} K$ .
  - a) Probar que si  $K \triangleleft G$  entonces  $kh = hk, \forall h \in H, \forall k \in K$ .
  - b) Deducir que  $G$  es abeliano si y sólo si  $H$  y  $K$  son abelianos y  $K \triangleleft G$ .
2. Probar que  $S_n$  y  $D_n$ ;  $n \geq 3$  son isomorfos a productos semidirectos convenientes. Mostrar en ambos casos las dos maneras de hacerlo.
3. ¿Es  $\mathcal{H}$  isomorfo a algún producto semidirecto?
4. Determinar si existe un grupo  $K$  tal que  $G$  sea el producto semidirecto de  $H$  y  $K$  en cada uno de los siguientes casos. (Elegir la construcción que más le convenga.)
  - a)  $G = \mathbb{C}^*$      $H = S^1$
  - b)  $G = G_{12}$      $H = G_3$
  - c)  $G = G_{12}$      $H = G_2$
  - d)  $G = \mathbb{C}$      $H = \mathbb{R}$
  - e)  $G = GL(n, \mathbb{C})$      $H = SL(n, \mathbb{C})$
  - f)  $G = S_4$      $H = \{1, (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3)\}$
5. Sea  $G$  un grupo finito y sean  $H$  y  $K$  subgrupos de  $G$  tales que  $H \triangleleft G$ .  
Probar que  $G = H \cdot_{sd} K$  si y sólo si  $|G| = |H||K|$  y  $H \cap K = \{1\}$ .  
Deducir que si  $|G| = |H||K|$  y  $(|H|, |K|) = 1$  entonces  $G = H \cdot_{sd} K$ .
6. Sean  $H = \mathbb{Z}_4$  y  $K = \mathbb{Z}_3$ . Describir todos los productos semidirectos  $G = H \times_{\varphi} K$ .  
Mostrar que uno de estos es no abeliano y no isomorfo a  $A_4$ .

7. Probar en cada uno de los siguientes casos que el grupo  $G$  actúa sobre el conjunto  $X$ . En cada caso calcular  ${}^G X$ , las  $G$ -órbitas de  $X$  y el estabilizador de cualquier elemento de  $X$
- $G = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax + b \text{ con } a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R}\}$ ,  $X = \mathbb{R}$  y  $f.x = f(x)$
  - $G = \{f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, f(x) = ax + b \text{ con } a \in O_2(\mathbb{R}), b \in \mathbb{R}^2\}$ ,  $X = \mathbb{R}^2$  y  $f.x = f(x)$
  - $G = \mathbb{R}^*$ ,  $X = \mathbb{R}_{>0}$  y  $a.x = x^a$  con  $a \in \mathbb{R}^*$  y  $x \in \mathbb{R}_{>0}$ .
  - $G = SL(2, \mathbb{Z})$ ,  $X = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  y  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (ax + by, cx + dy)$
8. Sea  $G$  un grupo actuando sobre un conjunto  $X$  y  $S \triangleleft G$ . Determinar la condición necesaria y suficiente para que exista una acción de  $G/S$  en  $X$  tal que  $\bar{a} \cdot x = a \cdot x \quad \forall a \in G \text{ y } x \in X$ .
9. Sea  $X$  un conjunto finito. Determinar el número posible de acciones de  $\mathbb{Z}$  sobre  $X$ .
10. Sea  $G$  un grupo.
- Probar que si  $|G| = p^n$  con  $p$  primo y  $n \in \mathbb{N}$  entonces  $\mathcal{C}(G) \neq 1$
  - Probar que si  $G/\mathcal{C}(G)$  es cíclico entonces  $G$  es abeliano
  - Probar que si  $|G| = p^2$  con  $p$  primo entonces  $G$  es abeliano
  - Caracterizar todos los grupos de orden  $p^2$ .
  - Dar un ejemplo de un grupo  $G$  no abeliano tal que  $G/\mathcal{C}(G)$  sea abeliano.
11. Sea  $p$  un primo.
- Sea  $G$  un grupo no abeliano tal que  $|G| = p^3$ . Probar que  $\mathcal{C}(G) = [G; G]$  y calcular  $|\mathcal{C}(G)|$ .
  - Calcular  $[G, G]$  con  $G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{Z}_p \right\}$ .
12. Sea  $G$  un grupo tal que  $|G| = 2n$ ,  $G$  tiene  $n$  elementos de orden 2 y los restantes forman un subgrupo  $H$ . Probar que entonces  $n$  es impar y  $H \triangleleft G$ .
13. Sea  $p$  primo y  $|G| = n$ . Entonces existe  $k$  tal que  $n = p^k \Leftrightarrow \forall x \in G, \text{ord}(x) = p^s$  para algún  $s$ . ( $s$  depende de  $x$ )
14.  $G$  es un  $p$ -grupo  $\Leftrightarrow \forall H \triangleleft G, H$  y  $G/H$  son  $p$ -grupos.
15. Calcular todos los  $p$ -subgrupos de Sylow de:
- $$\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_{12}, \mathbb{Z}_{21} \oplus \mathbb{Z}_{15}, S_3 \oplus \mathbb{Z}_3, S_3 \oplus S_3$$
16. Sea  $G$  un grupo,  $|G| = pq$ ,  $p > q$  primos tal que  $q$  no divide a  $p - 1$ . Probar que  $G$  es cíclico.

17. Sean  $p, q$  primos,  $|G| = p^2q$ . Probar que  $G$  no es simple.
18. Probar que no existen grupos simples de los siguientes órdenes:  
30, 36, 56, 96, 200, 204, 260, 2540, 9075.
19. Sea  $G$  con  $|G| < \infty$  y  $p < q$  primos tal que  $p^2$  no divide a  $|G|$ . Sean  $H_p$  y  $H_q$  subgrupos de Sylow de  $G$  con  $H_p \triangleleft G$ . Probar
- $H_p.H_q$  es subgrupo de  $G$
  - $H_p.H_q \triangleleft G \Rightarrow H_q \triangleleft G$ .
20. Sea  $G$  un grupo y sea  $H \triangleleft G$ . Probar que  $G$  es resoluble si y sólo si  $H$  y  $G/H$  son resolubles.
21. Sean  $p$  y  $q$  primos distintos. Probar las siguientes afirmaciones:
- Todo grupo de orden  $pq$  es resoluble.
  - Todo grupo de orden  $p^2q$  es resoluble.
  - Si  $p$  y  $q$  son impares, todo grupo de orden  $2pq$  es resoluble.
  - Todo grupo de orden menor que 60 es resoluble.
22. Dado  $G$  un grupo finito, se define la sucesión de subgrupos  $\{G^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}_0}$  recursivamente de la siguiente manera:

$$\begin{cases} G^{(0)} & = & G \\ G^{(n+1)} & = & [G^{(n)}, G^{(n)}] \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Probar que  $G$  es resoluble si y sólo si existe  $k \in \mathbb{N}$  tal que  $G^{(k)} = \{1\}$ .