Álgebra II
Segundo Cuatrimestre — 2006
Práctica 7

En esta práctica, un A-módulo será un A-módulo a izquierda.

1. Sea A un anillo y M un A-módulo. Decidir si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa:

   a) Si M es libre, entonces es sin torsión.

   b) Si A es íntegro entonces M libre $\Rightarrow$ M sin torsión.

   c) Si $f : M \longrightarrow N$ es un morfismo de A-módulos y M es de torsión entonces $Im(f)$ es de torsión.

   d) Si $f : M \longrightarrow N$ es un morfismo de A-módulos y M es sin torsión entonces $Im(f)$ es sin torsión.

   e) Si A es conmutativo y N es sin torsión entonces $Hom_A(M, N)$ es sin torsión.

   f) Si A es conmutativo, M es de torsión y N es sin torsión entonces $Hom_A(M, N) = 0$.

2. Calcular $t\left(\mathbb{R}/_{\mathbb{Z}}\right)$.

3. Sea A un dominio principal que no es un cuerpo y sea M un A-módulo. Probar:

   a) Sea $p \in A$ un irreducible y $a \in A - \{0\}$. Entonces $(A/ < a >)[p] \simeq A/ < p^n >$ donde $n = \text{máx}\{k \in \mathbb{N}_0 \ / \ p^k | a\}$.

   b) M es simple $\iff$ $\exists\, p \in A$ irreducible tal que $M \simeq A/ < p >$.

   c) M es un A-módulo sin torsión $\iff$ $Hom_A(S, M) = 0$ para todo A-módulo simple S.

4. Sea A un dominio principal y sea M un A-módulo de tipo finito (es decir finitamente generado). Probar:

   a) M es de torsión $\iff$ $Hom_A(M, A) = 0$.

   b) M es indescomponible (es decir, no tiene sumandos directos propios) $\iff$ $M \simeq A$ o $\exists\, p \in A$ irreducible y $n \in \mathbb{N}$ tales que $M \simeq A/ < p^n >$.

5. Sea A un dominio principal y sea M un A-módulo. Probar:

   a) Si M es de tipo finito y S es un submódulo libre de M tal que M/S es sin torsión, entonces M es libre.

b) Si M no es de torsión y M/S es de tipo finito con torsión para todo submódulo $S \neq 0$ de M, entonces $M \simeq A$. Análogamente, si G es un grupo infinito tal que todo subgrupo no nulo tiene índice finito, $G \simeq \mathbb{Z}$.

6. Sea p un primo positivo. Clasificar todos los grupos abelianos de orden p^3, p^4 y p^5.

7. Clasificar los grupos abelianos de orden 18, 45, 100 y 180.

8. *a*) Sea G un grupo abeliano finito y sea p un primo positivo que divide al orden de G. Probar que el número de elementos de orden p en G es coprimo con p.

   b) Para cada grupo abeliano G de orden p^2q^2 (donde p y q son primos distintos) determinar cuántos elementos de orden pq y cuántos elementos de orden pq^2 hay en G.

9. Caracterizar los grupos abelianos finitamente generados tales que:

   a) Todo subgrupo propio de G es cíclico.

   b) Todo subgrupo propio de G es de orden primo.

   c) G posee exactamente 2 subgrupos propios no nulos.

   d) G posee exactamente 3 subgrupos propios no nulos.

   e) Todo subgrupo propio no nulo de G es maximal.

   f) Para todo par de subgrupos S y T de G, $S \subseteq T$ o $T \subseteq S$.

   g) El orden de todo elemento no nulo de G es primo.

   h) $G/_S$ es cíclico para todo subgrupo S no nulo de G.

   i) Todo par de subgrupos propios no nulos son isomorfos.

10. Calcular los factores invariantes (coeficientes de estructura) de los siguientes grupos abelianos:

    a) $\mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_6 \oplus \mathbb{Z}_9$.

    b) $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_8 \oplus \mathbb{Z}_{14}$.

    c) $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_{49} \oplus \mathbb{Z}$.

    d) $\mathbb{Z}_{12} \oplus \mathbb{Z}_{21} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_{20} \oplus \mathbb{Z}_9 \oplus \mathbb{Z}_7$.

    e) G un grupo abeliano de orden 36 que tiene exactamente 2 elementos de orden 3 y que no tiene elementos de orden 4.

    f) G un grupo abeliano de orden 225 que tiene por lo menos 40 elementos de orden 15 y tal que todo subgrupo de orden 9 de G es isomorfo a $\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3$.

11. Determinar los factores invariantes de los siguientes grupos abelianos dados por generadores y relaciones:

    a) $G = < a, b, c >; \quad 2a + 3b = 0; \quad 2a + 4c = 0$

    b) $G = < a, b, c >; \quad a = 3b; \quad a = 3c$

c) $G =< a, b, c >; \quad 3a = -c; \quad 3a = 3c - 8b$

d) $G ==< a, b, c >; \quad 3a = b; \quad b = 3c$

12. Calcular los coeficientes de estructura de los siguientes cocientes:

    a) $\mathbb{Z}^4/S$ con $S = \{m \in \mathbb{Z}^4 \ / \ m_1 + m_2 + m_3 + m_4 = 0,\ m_1 + m_2 - 2m_3 = 0\}$.

    b) $\mathbb{Z}^3/S$ con $S = \{m \in \mathbb{Z}^3 \ / \ m_1$ es par, $m_1 + 5m_2 - m_3 = 0\}$.

    c) $\mathbb{Z}^3/S$ con $S = \{m \in \mathbb{Z}^3 \ / \ m_1 = m_2 + m_3$ es par, $3|m_3\}$.

13. Sean p, q y r primos positivos. Determinar la cantidad de grupos no isomorfos de orden n, en cada uno de los siguientes casos:

    a) $n = p^6 q^3 r$.

    b) $n = p^2 q^4 r^5$.

    c) $n = p^3 q^4$.

14. a) Sea G un grupo abeliano de orden n. Probar que si d es un divisor de n, G posee subgrupos y grupos cocientes de orden d.

    b) Sea $n \in \mathbb{N}$. ¿Para qué divisores d de n existe un grupo abeliano de orden n y exponente d?

    c) Caracterizar los grupos abelianos finitos de orden menor o igual que 100 de exponente 9, 20 y 21.

    d) Sea G un grupo abeliano y sea $x \in G$ un elemento tal que $\mathrm{ord}(x) = \exp(G)$. Probar que $< x >$ es un sumando directo de G.

15. Caracterizar todos los $\mathbb{Z}[i]$-módulos de 5, 6, 21 y 65 elementos.

16. Caracterizar los $\mathbb{K}[X]$-módulos de dimensión 1,2 y 3 sobre $\mathbb{K}$, para $\mathbb{K} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$. Comparar.

17. Encontrar los factores invariantes (coeficientes de estructura) de los $\mathbb{K}[X]$-módulos definidos por las siguientes matrices:

    a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

    b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

    c) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

    d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$.

    Para cada matriz analizar $\mathbb{K} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ por separado.