Módulos fielmente playos

Nicolás S. Botbol
Dep. de Matemática - FCEyN - UBA
nbotbol@dm.uba.ar

En estas notas A será un anillo conmutativo. En las definiciones siguientes, sin embargo, esta hipótesis no es necesaria.

1 Definición. Sea A un anillo y M un A-módulo a izquierda. Diremos que M es un A-módulo *playo*, o simplemente que es A-*playo*, si para toda sucesión exacta corta de A-módulos a derecha

$$0 \to N' \to N \to N'' \to 0,$$

la sucesión que se obtiene al tensorizar contra M a derecha,

$$0 \to N' \otimes_A M \to N \otimes_A M \to N'' \otimes_A M \to 0$$

también es exacta.

2 Observación. Recuérdese que tensorizar siempre preserva la exactitud a la derecha. Entonces la playitud (o platitud) de M puede verificarse sólo chequeando que para toda flecha inyectiva de módulos $f : N' \to N$, la fecha inducida $f \otimes id_M : N' \otimes_A M \to N \otimes_A M$ también es inyectiva.

3 Observación. En lenguaje más categórico, esto se dice de la siguiente forma. Cualquiera sea $M \in {}_A\mathrm{Mod}$, el funtor $- \otimes_A M : \mathrm{Mod}_A \to \mathrm{Mod}_{\mathbb{Z}}$ es exacto a derecha y un módulo $M \in {}_A\mathrm{Mod}$ es A-playo precisamente cuando $- \otimes_A M$ es exacto.

Es importante notar que esto NO dice que una sucesión

$$0 \to N' \to N \to N'' \to 0$$

es exacta si y solo si

$$0 \to N' \otimes_A M \to N \otimes_A M \to N'' \otimes_A M \to 0$$

lo es. Por ejemplo la sucesión $0 \to \mathbb{Z}_n \to 0$ no es exacta (ya que $\mathbb{Z}_n \neq 0$) pero al aplicarle $- \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ se obtiene $0 \to 0 \to 0$, que sí lo es.

Esto nos lleva a introducir otro tipo de módulos, que serán aquellos que sí satisfacen esta propiedad.

4 Definición. Sea A un anillo y M un A-módulo a izquierda. Diremos que M es un A-módulo *fielmente playo*, o simplemente que es A-*fielmente playo*, si para toda sucesión de A-módulos a derecha

$$0 \to N' \to N \to N'' \to 0,$$

la sucesión que se obtiene al tensorizarla por M,

$$0 \to N' \otimes_A M \to N \otimes_A M \to N'' \otimes_A M \to 0$$

es exacta si y solo si la anterior lo era.

A continuación, un resultado clásico sobre los módulos fielmente playos:

5 Teorema. *Sea A un anillo y M un A-módulo. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*
(a) M es A-fielmente playo;
(b) M es A-playo y para todo A-módulo N no nulo, $N \otimes_A M \neq 0$;
(c) M es A-playo y para todo ideal maximal $\mathfrak{m}$ de A, $\mathfrak{m}M \neq M$.

Demostración. $(a) \Rightarrow (b)$ Tomemos la sucesión $0 \to N \to 0$. Si $N \otimes_A M = 0$ entonces la sucesión que se obtiene al tensorizar es la sucesión nula, y por lo tanto exacta. A partir de la fiel-playitud de M se tiene que la primera también lo era y entonces $N = 0$.

$(b) \Rightarrow (a)$ Consideremos ahora la sucesión $N' \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} N''$ de A-módulos, y apliquemos el funtor $- \otimes_A M$. Se obtiene la sucesión

$$N' \otimes_A M \xrightarrow{f_M} N \otimes_A M \xrightarrow{g_M} N'' \otimes_A M.$$

Si ésta última es exacta entonces $0 = g_M \circ f_M = (g \circ f)_M$. Escribiendo $h = g \circ f$, tenemos que a partir de la sucesión exacta corta

$$0 \to \ker(h) \to N' \xrightarrow{h} \operatorname{im}(h) \to 0$$

y la playitud de M, la sucesión

$$0 \to \ker(h) \otimes_A M \to N' \otimes_A M \xrightarrow{h_M} \operatorname{im}(h) \otimes_A M \to 0$$

es exacta. Se ve entonces que $\operatorname{im}(g_M \circ f_M) = \operatorname{im}(h_M) = \operatorname{im}(h) \otimes_A M$. Por hipótesis, $\operatorname{im}(g \circ f)$ debe anularse y, en consecuencia, $\operatorname{im}(f) \subset \ker(g)$.

Pongamos $H = \ker(g)/\operatorname{im}(f)$. Mirando la sucesión exacta

$$0 \to \operatorname{im}(f) \to \ker(g) \to H \to 0$$

y teniendo en cuenta la exactitud de $- \otimes_A M$, concluimos que la sucesión

$$0 \to \operatorname{im}(f) \otimes_A M \to \ker(g) \otimes_A M \to H \otimes_A M \to 0$$

es exacta. Por lo tanto

$$\frac{\ker(g_M)}{\operatorname{im}(f_M)} \cong \frac{\ker(g) \otimes_A M}{\operatorname{im}(f) \otimes_A M} \cong H \otimes_A M;$$

el primero isomorfismo sigue de lo antes observado y el segundo, de la sucesión exacta corta de arriba.

Ahora, como $\ker(g_M)/\operatorname{im}(f_M) = 0$ por la exactitud del principio, es $H \otimes_A M = 0$. Usando la hipótesis, vemos que $H = 0$, como queramos.

$(b) \Rightarrow (c)$ Como $M/\mathfrak{m}M \cong A/\mathfrak{m} \otimes_A M$ y $A/\mathfrak{m} \neq 0$, vemos que es $M/\mathfrak{m}M \neq 0$ y, por lo tanto, $M \neq \mathfrak{m}M$.

$(c) \Rightarrow (b)$ Supongamos que N es un A-módulo no nulo y sea $x \in N$ un elemento no nulo. En vista de la sucesión exacta

$$0 \to \operatorname{ann}(x) \to A \to Ax \to 0,$$

se tiene un isomorfismo $A/\operatorname{ann}(x) \cong Ax$. Por otro lado, como A es un anillo conmutativo, existe un ideal maximal $\mathfrak{m}$ que contiene a $\operatorname{ann}(x)$.

Por hipótesis, entonces, tenemos que $M \neq \mathfrak{m}M \supset \operatorname{ann}(x)M$ y, pasando al cociente, que $Ax \otimes_A M \cong A/ann(x) \otimes_A M \cong M/\operatorname{ann}(x)M \neq 0$. Tensorizando la sucesión exacta $0 \to Ax \to N$ con M y usando que M es playo, vemos que $0 \to Ax \otimes_A M \to N \otimes_A M$ es exacta. En particular, $N \otimes_A M \neq 0$, como queríamos probar. $\square$

6 Observación. La equivalencia entre los dos primeros puntos dice que los módulos fielmente playos son aquellos mdulos M para los que el funtor $- \otimes_A M$ resulta inyectivo. Esto es, un módulo M es fielmente playo si, para todo $N \in \operatorname{Mod}_A$, $(- \otimes_A M)(N) := N \otimes_A M = 0$ implica que $N = 0$.