Álgebra II
Primer Cuatrimestre — 2007
Segundo parcial — Recuperatorio

Apellido y nombre: ....

Comisión: .... L.U.: .... Páginas: ....

1. Sea $D_4 = \langle s, t : s^2 = t^4 = stst = 1 \rangle$ el grupo diedral de 4 elementos. Determine las descomposiciones de Wedderburn de las álgebras de grupo $\mathbb{R}D_4$ y $\mathbb{C}D_4$.

2. Sea A un anillo y M un A-módulo simple. Como grupo abeliano o bien M es isomorfo a una suma directa de copias de $\mathbb{Q}$ o bien existe un número primo p tal que M es una suma directa de copias de $\mathbb{Z}_p$.

3. Sea A un anillo semisimple.

(a) Si $a, b \in A$ son tales que $ab = 1$, entonces $ba = 1$.

(b) Si $a \in A$ es tal que $I = aA$ es un ideal bilátero de A, entonces $I = Aa$.

4. Sea A un anillo y M un A-módulo. Si $M_1, M_2 \subset M$ son dos submódulos inyectivos, entonces $M_1 + M_2$ también es un módulo inyectivo.

5. Consideremos un anillo conmutativo A. Consideremos una sucesión de A-módulos y morfismos de A-módulos

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0 \tag{1}$$

tales que $gf = 0$. Muestre que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) La sucesión (1) es exacta.

(ii) Para cada ideal primo $\mathfrak{p} \lhd A$, la sucesión

$$0 \longrightarrow M'_{\mathfrak{p}} \xrightarrow{f_{\mathfrak{p}}} M_{\mathfrak{p}} \xrightarrow{g_{\mathfrak{p}}} M''_{\mathfrak{p}} \longrightarrow 0$$

obtenida de (1) localizando en $\mathfrak{p}$, es exacta.

(iii) Para cada ideal maximal $\mathfrak{m} \lhd A$, la sucesión

$$0 \longrightarrow M'_{\mathfrak{m}} \xrightarrow{f_{\mathfrak{m}}} M_{\mathfrak{m}} \xrightarrow{g_{\mathfrak{m}}} M''_{\mathfrak{m}} \longrightarrow 0$$

obtenida de (1) localizando en $\mathfrak{m}$, es exacta.

6. Sea A un anillo y supongamos que

$$0 \longrightarrow K \xrightarrow{d} P \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

y

$$0 \longrightarrow K' \xrightarrow{d'} P' \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

son sucesiones exactas cortas de A-módulos que terminan en el mismo módulo M. Si P y P' son proyectivos, entonces

$$P \oplus K' \cong P' \oplus K.$$

Para verlo,

- Muestre que existen morfismos f_0, f_1, g_0 y g_1 tales que conmuta el diagrama

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K \arrow[r, "d"] \arrow[d, "f_1"] & P \arrow[r] \arrow[d, "f_0"] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & K' \arrow[r, "d'"] \arrow[d, "g_1"] & P' \arrow[r] \arrow[d, "g_0"] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & K \arrow[r, "d"] & P \arrow[r] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

- Muestre que existen morfismos $s : P \to K$ y $t : P' \to K'$ tales que

$$ds = g_0 f_0 - \mathsf{id}_P \qquad d't = f_0 g_0 - \mathsf{id}_{P'}$$

- Construya un isomorfismo $P \oplus K' \to P' \oplus K$.