Álgebra II
Primer Cuatrimestre — 2007
Práctica 1: Grupos

1. Definiciones

1.1. *Exponentes pequeños.* El *exponente* de un grupo G es el menor número e tal que para todo $g \in G$ se tiene $g^e = 1$.

[1] *(a)* Mostrar que un grupo G tal que $g^2 = 1$ para todo $g \in G$ es abeliano.

[3] †*(b)* ¿Qué puede decir si se tiene en cambio que $g^3 = 1$?

[1] **1.2.** Encontrar todos los grupos de orden a lo sumo 6.

[2] †**1.3.** Mostrar que los tres axiomas de grupo—la asociatividad, la existencia de elemento neutro y la existencia de inversos—son independientes.

2. Ejemplos

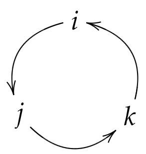
[1] **2.1.** *(a)* Sea $n \in \mathbb{N}$ y sea $\mathbb{G}_n = \{z \in \mathbb{C} : z^n = 1\}$. Mostrar que $\mathbb{G}_n$, con respecto al producto de $\mathbb{C}$ es un grupo abeliano cíclico.

[1] *(b)* Sea $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Mostrar que S^1, con respecto al producto de $\mathbb{C}$, es un grupo abeliano. ¿Es cíclico?

[1] **2.2.** Sea $\mathbb{H}$ el conjunto de 8 elementos $\{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ dotado del producto dado por la siguiente ecuaciones:

$$\begin{aligned} &i \cdot j = k, &&j \cdot k = i, &&k \cdot i = j, \\ &j \cdot i = -k, &&k \cdot j = -i, &&i \cdot k = -j, \\ &i \cdot i = j \cdot j = k \cdot k = -1, \end{aligned}$$

y la regla usual de los signos. Mostrar que $(\mathbb{H}, \cdot)$ es un grupo no abeliano. Llamamos a $\mathbb{H}$ el *grupo de cuaterniones*. El siguiente diagrama permite recordar la tabla de multiplicación de $\mathbb{H}$.



[1] **2.3.** Sea k un cuerpo y $n \in \mathbb{N}$. Ponemos

$$\mathsf{GL}_n(k) = \{A \in M_n(k) : \det A \neq 0\}$$

y

$$\mathsf{SL}_n(k) = \{A \in M_n(k) : \det A = 1\}.$$

Mostrar que, dotados de la multiplicación usual de matrices, estos dos conjuntos resultan ser grupos. Descríbalos para $n = 1$. ¿Cuándo son abelianos?

[1] **2.4.** *Grupo opuesto.* Sea G un grupo. Sea $(G^{\mathrm{op}}, \cdot)$ tal que $G^{\mathrm{op}} = G$ como conjunto, y el producto es

$$\cdot : (g, h) \in G^{\mathrm{op}} \times G^{\mathrm{op}} \mapsto hg \in G^{\mathrm{op}}.$$

Mostrar que $(G^{\mathrm{op}}, \cdot)$ es un grupo.

2.5. Sea G uno grupo y X un conjunto.

[1] *(a)* Sea $G^X = \{f : X \to G\}$ dotado del producto $\cdot : G^X \times G^X \to G^X$ dado por

$$(f \cdot g)(x) = f(x)g(x), \qquad \forall f, g \in G^X, \forall x \in X.$$

Mostrar que G^X es un grupo. ¿Cuándo es abeliano?

[1] *(b)* Sea $x_0 \in X$ y sea $H_{x_0} = \{f \in G^X : f(x_0) = 1\}$. Mostrar que H_{x_0} es un subgrupo de G. ¿Es normal?

[1] **2.6.** *Producto directo.* Sean G y H dos grupos. Consideremos la operación $\cdot$ sobre el conjunto $K = G \times H$ dada por

$$\cdot : \big((g_1, h_1), (g_2, h_2)\big) \in K \times K \mapsto (g_1g_2, h_1h_2) \in K.$$

Mostrar que K es un grupo. Llamamos a K el *producto directo de* G *y* H y lo notamos $G \times H$.

2.7. *$\mathbb{F}_p$-espacios vectoriales.*

[2] *(a)* Sea G un grupo abeliano y sea p un número primo. Supongamos que todo elemento de G tiene order p. Mostrar que es posible definir una multiplicación $\cdot : \mathbb{F}_p \times G \to G$ por escalares de $\mathbb{F}_p$ de manera que $(G, +, \cdot)$ resulte un $\mathbb{F}_p$-espacio vectorial.

[2] *(b)* Supongamos además que G es finito. Mostrar que existe $n \in \mathbb{N}_0$ tal que

$$G \cong \underbrace{\mathbb{Z}_p \times \cdots \times \mathbb{Z}_p}_{n \text{ veces}}.$$

3. Subgrupos

[1] **3.1.** Sea G un grupo y $H \subset G$ un subconjunto. Mostrar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) H es un subgrupo de G.

(ii) H es no vacío y cualesquiera sean $x, y \in H$, es $xy^{-1} \in H$.

Si además G es finito, estas afirmaciones son equivalentes a:

c) H es no vacío y cualesquiera sean $x, y \in H$, es $xy \in H$.

Dar un contraejemplo para esta última equivalencia cuando G es infinito.

3.2. Sea G un grupo y H_1 y H_2 subgrupos de G.

[1] *(a)* $H_1 \cap H_2$ es un subgrupo de G.

[1] *(b)* $H_1 \cup H_2$ es un subgrupo de G sii $H_1 \subset H_2$ o $H_2 \subset H_1$.

[2] **3.3.** Dado un grupo G, ¿es el subconjunto de elementos de orden finito un subgrupo de G?

3.4. Sea G un grupo.

[1] *(a)* Sea $\mathcal{H}$ una familia de subgrupos de G. Mostrar que $\bigcap_{H\in\mathcal{H}} H$ es un subgrupo de G.

[1+] *(b)* Sea ahora $X \subset G$ un subconjunto arbitrario. Mostrar que existe un menor subgrupo de G que contiene a X. Describirlo en término de los elementos de X.

El subgrupo cuya existencia se afirma en la segunda parte de este ejercicio se denomina el *subgrupo de G generado por X* y se denota $\langle X\rangle$. Si $X = \{x_1, \dots, x_r\}$, escribimos $\langle x_1, \dots, x_r\rangle$ en lugar de $\langle\{x_1, \dots, x_n\}\rangle$.

[1] **3.5.** Sea G un grupo, $X \subset X$ un subconjunto tal que $G = \langle X\rangle$ y sea N un subgrupo de G. Mostrar que N es normal en G sii $xNx^{-1} \subset N$ para todo $x \in X$.

[1+] **3.6.** Sea $n \in \mathbb{N}$ y sea $\omega \in \mathbb{G}_{2^n}$ una raíz primitiva 2^n-ésima. Consideremos las matrices

$$R = \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \omega^{-1} \end{pmatrix}, \qquad S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

y sea $\mathbb{H}_n = \langle R, S\rangle$ el subgrupo generado por R y S en $\mathsf{GL}_2(\mathbb{C})$. Llamamos a $\mathbb{H}_n$ el *n-ésimo grupo de cuaterniones generalizados*.

Determinar el orden de $\mathbb{H}_n$ y listar sus elementos.

[1] **3.7.** *(a)* Sea $G = \mathsf{GL}_2(\mathbb{Z})$ y sean $\alpha, \beta \in G$ dados por

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \beta = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Muestre que $\alpha^4 = \beta^3$, pero que $\alpha\beta$ tiene orden infinito. Así, $\langle\alpha, \beta\rangle$ es infinito.

Este ejemplo muestra que finitos elementos de orden finito pueden generar un subgrupo infinito.

(b) Determine $\langle\alpha, \beta\rangle$.

3.8. *Generación de S_n.*

[1] *(a)* Mostrar que

(i) $S_n = \langle\{(i\,j) : 1 \le i < j \le n\}\rangle$;

(ii) $S_n = \langle\{(1\,i) : 1 \le i \le n\}\rangle$;

(iii) $S_n = \langle\{(i\ \ i+1) : 1 \le i < n\}\rangle$;

(iv) $S_n = \langle(1\,2),\ (1\,2\,3\dots n)\rangle$;

[1+] †*(b)* Sea $\mathcal{T} = \{(i\,j) : 1 \le i < j \le n\}$ el conjunto de todas las transposiciones. Encuentre una condición necesaria y suficiente para que un subconjunto $T \subset \mathcal{T}$ para que $S_n = \langle T\rangle$.

3.9. Sea G un grupo.

[1] *(a)* Sea $\mathcal{H}$ una familia de subgrupos normales de G. Mostrar que $\bigcap_{H\in\mathcal{H}} H$ es un subgrupo normal de G.

[1] *(b)* Sea $X \subset G$ un subconjunto arbitrario. Mostrar que existe un menor subgrupo normal de G que contiene a X. Describirlo en término de los elementos de X.

El subgrupo cuya existencia se afirma en la segunda parte de este ejercicio se denomina el *subgrupo normal de G generado por X*. En general, este subgrupo no coincide con el subgrupo generado por X, construido en **3.4**.

[1] *(c)* Supongamos que $X \subset G$ es un conjunto tal que, cualquiera sea $g \in G$, es $gXg^{-1} \subset X$. Mostrar que entonces el subgrupo normal generado por X coincide con el subgrupo generado por X.

3.10. *(a)* Sea G un grupo y sea $N \subset G$ un subgrupo tal que $gNg^{-1} \subset N$ para todo $g \in G$. Muestre que N es normal.

(b) Sea $G = \mathsf{GL}_2(\mathbb{Q})$ y $H = \{\left(\begin{smallmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) : n \in \mathbb{Z}\} \subset G$. Entonces H es un subgrupo de G. Sea ahora $g = \left(\begin{smallmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \in G$. Muestre que $gHg^{-1} \subsetneq H$.

3.11. Si G es un grupo y $A, B \subset G$ son subconjuntos, definimos

$$AB = \{ab : a \in A, b \in B\}.$$

Consideremos un grupo G y $A, B \subset G$ dos subconjuntos arbitrarios.

[1] *(a)* AB es un subgrupo de G sii $AB = BA$.

[1] *(b)* $G = AB$ sii $G = \langle A, B\rangle$ y $AB = BA$.

[1] *(c)* Si $AB = BA$ y $C \subset G$ es un subgrupo tal que $A \subset C$, entonces $AB \cap C = A(B \cap C)$.

[1] *(d)* Si $G = AB$ y $C \subset G$ es un subgrupo tal que $A \subset C$, entonces $C = A(B \cap C)$.

3.12. Sea G un grupo. Si $a, b \in G$, escribimos $[a, b] = aba^{-1}b^{-1}$; $[a, b]$ es el *conmutador de a y b*. Claramente $[a, b] = 1$ sii a y b conmutan, así que en cierta forma $[a, b]$ mide la no-conmutatividad de a y b.

[1] *(a)* Sea $X = \{[a, b] : a, b \in G\}$ y sea $G' = \langle X\rangle$ el subgrupo generado por X en G. Mostrar que G' es normal en G. Llamamos a G' es *subgrupo derivado de G* y lo escribimos $[G, G]$.

[1] *(b)* G es abeliano sii $[G, G] = 1$.

[1] *(c)* Determinar $[G, G]$ cuando G es $\mathbb{H}$ o un grupo diedral D_n.

Un grupo es *perfecto* si coincide con su subgrupo derivado.

[3] †*(d)* Sea k un cuerpo finito. Mostrar que $[\mathsf{GL}_n(k), \mathsf{GL}_n(k)] = \mathsf{SL}_n(k)$ con la excepción de $\mathsf{GL}_2(\mathbb{F}_2)$. Mostrar que $\mathsf{SL}_n(k)$ es perfecto con la excepción de $\mathsf{SL}_2(\mathbb{F}_2)$ y $\mathsf{SL}_2(\mathbb{F}_3)$. ¿Qué sucede en los casos excepcionales?

[1] **3.13.** *(a)* Sea G un grupo y sea $\mathsf{Z}(G) = \{g \in G : gh = hg \text{ para todo } h \in G\}$. Mostrar que $\mathsf{Z}(G)$ es un subgrupo normal de G. Llamamos a $\mathsf{Z}(G)$ el *centro de G* y decimos que los elementos de $\mathsf{Z}(G)$ son *centrales* en G.

[1] *(b)* Sea G un grupo y $X \subset G$ un subconjunto tal que $G = \langle X\rangle$. Mostrar que es

$$\mathsf{Z}(G) = \{g \in G : gx = gx \text{ para todo } x \in X\}.$$

[1+] *(c)* Encontrar el centro de un grupo abeliano, de D_n para cada $n \geq 1$, de $\mathbb{H}$, de S_n para cada $n \geq 1$, de $\mathsf{GL}_n(R)$ para cada $n \geq 1$ y $R \in \{\mathbb{R}, \mathbb{Z}, \mathbb{C}, \mathbb{F}_p\}$.

[1] *(d)* Sea G un grupo y X un conjunto. Determinar el centro de G^X.

[1] **3.14.** Sea G un grupo y H un subgrupo abeliano de G. Mostrar que $H\mathsf{Z}(G)$ es un subgrupo abeliano de G.

3.15. Sea G un grupo.

[1] *(a)* Sea $g \in G$. El *centralizador de g en G* es el subconjunto $\mathsf{C}(g) = \{h \in G : gh = hg\}$. Mostrar que se trata de un subgrupo de G y que es, en efecto, el subgrupo más grande de G que contiene a g y en el que g es central.

[1] *(b)* Sea $N \subset G$ un subconjunto. El *centralizador de N en G* es el subconjunto $\mathsf{C}(N) = \{h \in G : nh = hn \text{ para cada } n \in N\}$. Mostrar que se trata de un subgrupo de G.

[1] *(c)* Mueste que si $N \subset G$ es un subconjunto, $\mathsf{C}(\langle N \rangle) = \mathsf{C}(N)$.

[1] *(d)* Sea $H \subset G$ un subgrupo de G. El *normalizador de H en G* es el subconjunto $\mathsf{N}(H) = \{g \in G : gH = Hg\}$. Mostrar que se trata de un subgrupo de G. Mostrar, más aún, que H es un subgrupo normal de $\mathsf{N}(H)$.

[1] *(e)* Si $N \subset G$ es un subconjunto normal (es decir, si para cada $g \in G$, gNg^{-1}), entonces $\mathsf{Z}(N)$ es un subgrupo normal de G.

[1+] **3.16.** Si $g = (i_1\, i_2 \cdots i_{k-1}\, i_k) \in S_n$ es un ciclo de orden k, determinar $\mathsf{C}(g)$.

3.17. Sea G un grupo y S y T subconjuntos de G tales que $S \subset T$. Entonces:

[1] *(a)* $\mathsf{C}(S) \supset \mathsf{C}(T)$;

[1] *(b)* $\mathsf{C}(\mathsf{C}(S)) \supset S$; y

[1+] *(c)* $\mathsf{C}(\mathsf{C}(\mathsf{C}(S))) = \mathsf{C}(s)$.

3.18. Sea G un grupo y $g \in G$. Entonces:

[1] *(a)* $g \in \mathsf{C}(g)$;

[1] *(b)* $\mathsf{C}(\mathsf{C}(g)) = \mathsf{Z}(\mathsf{C}(g))$;

[1+] *(c)* $\mathsf{C}(g) \subset \mathsf{C}(h)$ sii $h \in \mathsf{Z}(\mathsf{C}(g))$; y

[1+] *(d)* $\mathsf{C}(g) \subset \mathsf{C}(h)$ sii $\mathsf{Z}(\mathsf{C}(g)) \supset \mathsf{Z}(\mathsf{C}(h))$.

3.19. Sean G un grupo y H y K subgrupos de G.

[1] *(a)* Si alguno de H o K es normal en G entonces HK es un subgrupo.

[1] *(b)* Si los dos son normales, entonces $HK = KH$ y se trata de un subgrupo normal de G.

[1] **3.20.** Sea G un grupo y N un subgrupo normal de G. Mostrar que $[N, G] \subset N$.

†**3.21.** El objetivo de este ejercicio es dar un ejemplo de que la normalidad de subgrupos no es transitiva.

[1] *(a)* Sea G el conjunto de todas las funciones $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que pueden escribirse en la forma

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by + e \\ cx + dy + f \end{pmatrix}$$

para ciertos $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ con $ad - bc \neq 0$. Mostrar que G, con respecto a la composición de funciones, es un grupo.

[1] *(b)* Sea T el subconjunto de G formado por las funciones $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que pueden escribirse en la forma

$$f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x+e\\y+f\end{pmatrix}$$

para ciertos $e, f \in \mathbb{R}$. Mostrar que T es un subgrupo *normal* en G.

[1] *(c)* Sea L el subconjunto de T formado por las funciones $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que pueden escribirse en la forma

$$f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x+e\\y+f\end{pmatrix}$$

para ciertos $e, f \in \mathbb{Z}$. Mostrar que se trata de un subgrupo de T; como T es abeliano, L es normal en T.

[1] *(d)* Mostrar que L no es normal en G.

[1+] **3.22.** Encontrar todos los subgrupos de D_4. Clasifíquelos bajo isomorfismo y determinar cuáles son normales.

[2-] **3.23.** Sea $\mathbb{H}$ el grupo de los cuaterniones. Mostrar que posee un único elemento de orden 2 y que éste es central. Deducir que $H \not\cong D_4$ y que todo subgrupo de H es normal.

Un grupo no abeliano con esta propiedad se dice *Hamiltoniano*. El siguente teorema de Reinhold Baer (1902–1979) describe completamente esta clase de grupos:

> **Teorema.** (R. Baer, Situation der Untergruppen und Struktur der Gruppe, S. B. Heidelberg. Akad. Wiss. 2 (1933), 12-17) *Un grupo finito es hamiltoniano sii es isomorfo a $\mathbb{H} \times A$ para algún grupo abeliano que no tiene elementos de orden* 4.

[2-] **3.24.** Sea G un grupo y N un subgrupo normal de G de índice finito n. Mostrar que si $g \in G$, entonces $g^n \in N$. Dar un ejemplo para mostrar que esto puede ser falso si N no es normal.

[2-] **3.25.** *(a)* Mostrar que un grupo no trivial sin subgrupos propios es cíclico de orden primo.

[2-] *(b)* Sea G un grupo cíclico y $g \in G$ un generador. Sea $n = |G|$ y sea p un número primo tal que $p \mid n$. Entonces $\langle g^p \rangle$ es un subgrupo maximal de G.

[2] *(c)* Mostrar que un grupo finito que posee un solo subgrupo maximal es cíclico que tiene como orden una potencia de un número primo.

[2] †**3.26.** Sea G un grupo finito y H el subgrupo de G generado por los elementos de orden impar. Entonces H es normal y tiene índice una potencia de 2.

†**3.27.** *Subgrupo de Frattini.* Sea G un grupo. Sea $\mathcal{M}$ el conjunto de subgrupos propios maximales de G. Si $\mathcal{M} \neq \varnothing$, ponemos $\Phi(G) = \bigcap_{M \in \mathcal{M}} M$; si, en cambio, $\mathcal{M} = \varnothing$, ponemos $\Phi(G) = G$. $\Phi(G)$ es el *subgrupo de Frattini*, en honor de Giovanni Frattini (1852–1925, Italia).

[1] *(a)* Determinar el subgrupo de Frattini de $\mathbb{Z}_{p^2}$ si p es primo.

Un elemento $g \in G$ es un *no-generador* si siempre que $X \subset G$ es un conjunto generador de G y $g \in X$, entonces $X \setminus \{g\}$ también genera a G.

[3] *(b)* Mostrar que $\Phi(G)$ es el conjunto de elementos no-generadores de G.

[1] *(c)* Mostrar que $\Phi(G)$ es normal.

[2] **3.28.** Sea G un grupo y H un subgrupo propio de G. Entonces $\langle G \setminus H \rangle = G$.

[2-] **3.29.** Sea $G \subset \mathbb{C}^\times$ un subgrupo finito del grupo multiplicativo $\mathbb{C}^\times$. Entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $G = \mathbb{G}_n$ es el grupo de las raíces n-ésimas de la unidad.

4. Homomorfismos

[1] **4.1.** Sea G un grupo y X un conjunto. Sea $x_0 \in X$ y sea

$$\mathsf{ev}_{x_0} : f \in G^X \mapsto f(x_0) \in G.$$

Mostrar que se trata de un homomorfismo de grupos. Determinar su núcleo e imagen.

[1+] **4.2.** Mostrar que cualquiera sea el grupo G, existe un isomorfismo $G \cong G^{\mathrm{op}}$ entre G y su grupo opuesto.

[1] **4.3.** Sean G y H grupos, y sea $\mathsf{hom}_{\mathsf{Grp}}(G, H)$ el conjunto de todos los homomorfismos $f : G \to H$. ¿Se trata en general de un subgrupo de H^G? Encuentre condiciones sobre H que garanticen que lo sea.

[1] **4.4.** Muestre que el grupo $\mathbb{H}$ del ejercicio **2.2** y el grupo $\mathbb{H}_1$ del ejercicio **3.6** son isomorfos.

4.5. Sea G un grupo.

[1] *(a)* Sea $g \in G$ e $\mathsf{inn}_g : h \in G \mapsto ghg^{-1} \in G$. Mostrar que $\mathsf{inn}_g \in \mathsf{Aut}(G)$.

[1] *(b)* Mostrar que la aplicación $\mathsf{inn} : g \in G \mapsto \mathsf{inn}_g \in \mathsf{Aut}(G)$ es un homomorfismo de grupos.

[1] *(c)* Describir el núcleo de inn. Los automorfismos que están en la imagen de G se llaman *automorfismos interiores* y la imagen misma se denota $\mathsf{Inn}(G)$.

[1] *(d)* Mostrar que $\mathsf{Inn}(G)$ es un subgrupo normal de $\mathsf{Aut}(G)$.

[2] **4.6.** Sea G un grupo finito. Supongamos que existe $f \in \mathsf{Aut}(G)$ tal que $f^2 = 1$ y f no deja fijo ningún elemento de G aparte de 1. Entonces cada cada $g \in G$ es $f(g) = g^{-1}$ y G es abeliano de orden impar.

Sugerencia. Muestre la aplicación $\phi : g \in G \mapsto g^{-1}f(g) \in G$ es biyectiva y muestre que $f(g) = g^{-1}$ escribiendo a g en la forma $h^{-1}f(h)$ para algún elemento h de G.

4.7. Sea G un grupo. Un subgrupo H de G se dice *característico* si cualquiera sea $f \in \mathsf{Aut}(G)$, $f(H) \subset H$.

[1] *(a)* Muestre que si $H \subset G$ es un subgrupo característico, entonces para cada $f \in \mathsf{Aut}(G)$ es $f(H) = H$.

[1] *(b)* Muestre que $\mathsf{Z}(G)$ y $[G, G]$ son característicos.

[1] *(c)* $\Phi(G)$ es un subgrupo característico de G.

[1] *(d)* Si H es un subgrupo característico de G, entonces H es normal en G.

[1] *(e)* Si un grupo G posee un único subgrupo H de un orden dado, éste es característico.

[1] *(f)* Si H es un subgrupo característico en G y K es un subgrupo característico en H, entonces H es un subgrupo característico de G. Comparar con **3.21**.

[1] *(g)* Si $N \subset G$ es un subconjunto característico (es decir, si para cada $f \in \mathsf{Aut}(G)$, $f(N) \subset N$), entonces $\langle N \rangle$ y $\mathsf{C}(N)$ son subgrupos característicos de G.

Un subgrupo H de G se dice *totalmente característico* si $f(H) \subset H$ siempre que $f \in \mathsf{End}(G)$.

[1] *(h)* Un subgrupo totalmente característico es característico.

[2] *(i)* Dar ejemplos de un subgrupo totalmente característico y de un subgrupo característico pero no totalmente característico.

[1+] *(j)* Todos los subgrupos de un grupo cíclico son totalmente invariantes. ¿Vale la recíproca?

[1+] †**4.8.** *(a)* Sea G un grupo y sean H y K subgrupos de G de índice finito. Entonces $L = H \cap K$ también tiene índice finito.

Sugerencia. Para verlo muestre que es posible definir una aplicación $\phi : G/L \to G/H \times G/K$ de manera que $\phi(xL) = (xH, xK)$ y muestre que ésta es inyectiva.

[1+] *(b)* El conjunto de elementos de un grupo que poseen un número finito de conjugados es un subgrupo característico.

4.9. Sea $f : G \to H$ un homomorfismo de grupos.

[1] *(a)* Si H es abeliano, entonces $[G, G] \subset \ker f$.

[1] *(b)* Mostrar que $f([G, G]) \subset [H, H]$. En particular, concluya que $[G, G]$ es un subgrupo característico de G.

4.10. Sea $f : G \to H$ un homomorfismo de grupos. ¿Es cierto en general que $f(\mathsf{Z}(G)) \subset \mathsf{Z}(H)$? En caso negativo, de condiciones suficientes que garanticen esta inclusión. Bajo esas condiciones, ¿es $f(\mathsf{Z}(G)) = \mathsf{Z}(H)$?

4.11. Sea G un grupo.

[1] *(a)* Mostrar que la función $\mathsf{ev}_1 : f \in \mathsf{hom}_{\mathsf{Grp}}(\mathbb{Z}, G) \mapsto f(1) \in G$ es una biyección.

[1] *(b)* Describir $\mathsf{hom}_{\mathsf{Grp}}(\mathbb{Z}^2, G)$ y, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\mathsf{hom}_{\mathsf{Grp}}(\mathbb{Z}_n, G)$.

[1] **4.12.** *(a)* Determinar $\mathsf{hom}_{\mathsf{Grp}}(\mathbb{Q}, \mathbb{Z})$ y $\mathsf{hom}_{\mathsf{Grp}}(\mathbb{Q}, G)$ para un grupo finito G.

[1] *(b)* Describir la imagen $D(G)$ de $\mathsf{ev}_1 : f \in \mathsf{hom}_{\mathsf{Grp}}(\mathbb{Q}, G) \mapsto f(1) \in G$.

[1] *(c)* Mostrar que cuando G es abeliano, $D(G)$ es un subgrupo característico de G

4.13. Sea G un grupo.

[1] *(a)* Encontrar una condición necesaria y suficiente sobre G para que la aplicación $(g, h) \in G \times G \mapsto gh \in G$ resulte un homomorfismo de grupos.

[1] *(b)* Encontrar una condición necesaria y suficiente sobre G para que la aplicación $g \in G \mapsto g^{-1} \in G$ resulte un homomorfismo de grupos.

[1] *(c)* Encontrar una condición necesaria y suficiente sobre G para que la aplicación $g \in G \mapsto g^2 \in G$ resulte un homomorfismo de grupos.

[1+] **4.14.** Sean $m, n \in \mathbb{N}$. Si $(m, n) = 1$, entonces $\mathsf{hom}_{\mathsf{Grp}}(\mathbb{Z}_m, \mathbb{Z}_n)$ es trivial. ¿Qué sucede en general?

4.15. Sea G un grupo finito y $\phi : G \to G$ un endomorfismo de G.

[1+] *(a)* Existe $n \in \mathbb{N}$ tal que si $m \geq n$, entonces $\phi^m(G) = \phi^n(G)$. Sea $\alpha = \phi^n$.

[2] *(b)* Mostrar que $\operatorname{im} \alpha$ es normal o dar un contraejemplo.

[1+] **4.16.** Usando el hecho que $\mathsf{GL}_2(\mathbb{F}_2)$ permuta los elementos no nulos de $\mathbb{F}_2^2$, encuentre un isomorfismo $\mathsf{GL}_2(\mathbb{F}_2) \cong S_3$.

[1] **4.17.** *(a)* Sea G un grupo y sea $X \subset G$ un subconjunto tal que $\langle X \rangle = G$. Sea $f \in \mathsf{End}(G)$ tal que $f(x) = x$ para todo elemento $x \in X$. Entonces $f = \mathsf{id}_G$.

[1+] *(b)* Sea X el conjunto de los elementos de orden 2 de S_3. Muestre que cada automorfismo de S_3 induce una permutación de X y deduzca que $\mathsf{Aut}(S_3) \cong S_3$.

4.18. Sea $n \geq 2$. Consideramos el polinomio *discriminante*

$$\Delta(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j) \in \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]$$

Si $\pi \in S_n$ es una permutación de $\{1, \ldots, n\}$, definimos

$$\varepsilon(\pi) = \frac{\Delta(x_{\pi(1)}, \ldots, x_{\pi(n)})}{\Delta(x_1, \ldots, x_n)}.$$

[1] *(a)* Mostrar que cualquiera sea $\pi \in S_n$, es $\varepsilon(\pi) \in \{\pm 1\}$.

[1] *(b)* Mostrar que $\varepsilon : S_n \to \{\pm 1\}$ es un homomorfismo de grupo si dotamos a $\{\pm 1\}$ del producto usual.

El subgrupo $A_n = \ker \varepsilon$ es el *n-ésimo grupo alternante.*

[1] *(c)* Describir A_2 y A_3.

[1] *(d)* Sea $\tau = (i\,j) \in S_n$ una transposición. Determinar el valor de $\varepsilon(\tau)$.

[2-] *(e)* Recordemos que todo elemento $\pi \in S_n$ puede ser escrito—de muchas maneras—como producto de transposiciones. Muestre que la paridad del número de transposiciones empleadas depende solamente de π.

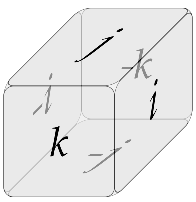
Una permutación que puede escribirse de alguna forma como un producto de un número par de transposiciones se dice *par*.

4.19. *Automorfismos de $\mathbb{H}$.*

[1] *(a)* Determine todos los automorfismos interiores de $\mathbb{H}$.

[2] *(b)* De ejemplos de automorfismos de $\mathbb{H}$ no interiores.

[2] *(c)* Muestre que $\mathsf{Aut}(\mathbb{H}) \cong S_4$.



†**4.20.** *Automorfismos de S_n.*

(a) Sea $\phi \in \mathsf{Aut}(S_n)$ y sea $g = (1\,2\,3)$. Mostrar que $\phi(g)$ es un producto de 3-ciclos disjuntos, que $\phi(\mathsf{cl}(g)) \subset \mathsf{cl}(\phi(g))$ y que, de hecho, la restricción $\phi : \mathsf{cl}(g) \to \mathsf{cl}(\phi(g))$ es una biyección.

(b) Mostrar que

$$|\mathsf{cl}(g)| = \frac{n!}{3(n-3)!}$$

y que si $\phi(g)$ es producto de r 3-ciclos disjuntos,

$$|\mathsf{cl}(\phi(g))| = \frac{n!}{3^r r!(n-3r)!}.$$

(c) Mostrar que o bien $r = 1$ o bien $r = 2$ y $n = 6$.

Supongamos desde ahora que $n \neq 6$.

(d) La imágen de todo 3-ciclo por ϕ es un 3-ciclo.

(e) Sea $3 \leq i \leq n$ y supongamos que $\phi((1\,2\,3)) = (\alpha\,\beta\,\gamma)$ y $\phi((1\,2\,i)) = (\alpha'\,\beta'\,\gamma')$. Muestre que $(\alpha\,\beta\,\gamma)(\alpha'\,\beta'\,\gamma')$ tiene orden dos y use esto para concluir que $|\{\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'\}| = 4$.

(f) Muestre que existen $\alpha, \beta, \gamma_3, \dots, \gamma_n$ distintos de manera que para cada $3 \leq i \leq n$ es $\phi((1\,2\,i)) = (\alpha\,\beta\,\gamma_i))$.

(g) Sea $\pi \in S_n$ tal que $\pi(1) = \alpha$, $\pi(2) = \beta$ y $\pi(i) = \gamma_i$ para cada $3 \leq i \leq n$. Muestre que $\phi(x) = \pi x \pi^{-1}$.

(h) Muestre que $\mathsf{inn} : S_n \to \mathsf{Aut}(S_n)$ es un isomorfismo.

(i) Determine $\mathsf{Aut}(S_6)$.

5. Cocientes

5.1. Mostrar que

(a) $\mathbb{C}^\times/\mathbb{R}^+ \cong S^1$;

(b) $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_m$ cualquiera sea $m \in \mathbb{N}$;

(c) $\mathsf{GL}_n(k)/\mathsf{SL}_n(k) \cong k^\times$ si k es un cuerpo y $n \in \mathbb{N}$;

(d) $S^1/\mathbb{G}_n \cong S^1$ si $n \in \mathbb{N}$;

(e) si $m|n$, $\mathbb{G}_n/\mathbb{G}_m \cong \mathbb{G}_{n/m}$.

5.2. Si G es un grupo no abeliano, entonces $G/\mathsf{Z}(G)$ no es cíclico.

Sugerencia. Use **3.14**.

5.3. Muestre que $G/\mathsf{Z}(G) \cong \mathsf{Inn}(G)$.

5.4. Si G es un grupo y H y K son subgrupos normales de G, muestre que $G/(H \cap K)$ es isomorfo a un subgrupo de $G/H \times G/L$.

5.5. Dado un grupo G, el *grupo* $\mathsf{Out}(G)$ *de automorfismos exteriores de* G es el cociente $\mathsf{Aut}(G)/\mathsf{Inn}(G)$; recordemos que en el ejercicio **4.5***(d)* vimos que $\mathsf{Inn}(G)$ es normal en $\mathsf{Aut}(G)$. Es importante observar que los elementos de $\mathsf{Out}(G)$ *no* son automorfismos de G.

Determinar $\mathsf{Out}(G)$ cuando $G \in \{S_3, S_4, \mathbb{H}\}$.

5.6. Sea G un grupo y sea H un subgrupo no normal. Mostrar que el conjunto de coclases izquierdas de H en G no forma un grupo bajo la multiplicación usual.

6. Productos

6.1. Sean U y V dos grupos. Sean además $f : U \to W$ y $g : V \to W$ dos homomorfismos de grupos. Entonces la aplicación $h : (u, v) \in U \times V \mapsto f(u)g(v) \in K$ es un homomorfismo de grupos sii todo elemento de $f(U)$ conmuta con todo elemento de $h(V)$.

6.2. Si G y H son grupos, determine $\mathsf{Z}(G \times H)$.

6.3. *Producto directo interno.* Sea G un grupo.

(a) Sean N y M dos subgrupos normales de G y supongamos que $N \cap M = 1$ y $G = NM$. Mostrar que entonces es $G \cong N \times M$.

(b) Supongamos que G es grupo finito de orden mn con $(m, n) = 1$. Si G posee exactamente un subgrupo N de orden n y exactamente un subgrupo M de orden m, entonces G es isomorfo al producto directo de N y M.

†*(c)* Sean $k \in \mathbb{N}$ y $(N_i)_{i=1}^k$ una familia de subgrupos normales de G tales que $G = \left\langle \bigcup_{i=1}^k N_i \right\rangle$ y para cada $j \in \{1, \ldots, k\}$ se tiene que

$$N_j \cap \left\langle \bigcup_{\substack{1 \le i \le k \\ i \ne j}} N_i \right\rangle = 1.$$

Mostrar que entonces $G \cong N_1 \times \cdots \times N_k$.

†*(d)* Otra vez, supongamos que G es finito y sean $N_1, \ldots, N_k$ subgrupos normales de G de órdenes $r_1, \ldots, r_k$ tales que $(r_i, r_j) = 1$ si $1 \le i, j \le k$ y $|G| = r_1 \cdots r_k$. Entonces $G \cong N_1 \times \cdots \times N_k$.

6.4. *Producto semi-directo.*

(a) Sean G y N grupos y sea $\theta : G \to \mathsf{Aut}(N)$ un homomorfismo de grupos. Sea $K = N \times G$ y consideremos el producto en K dado por

$$(n, g) \cdot (n', g') = (n\theta(g)(n'), gg'), \qquad \forall (n, g), (n', g') \in K.$$

Mostrar que, con respecto a este producto, K es un grupo.

Llamamos al grupo K construido el *producto semi-directo (o cruzado) de N por G con respecto a θ* y lo notamos $N \rtimes_\theta G$.

(b) Encontrar homomorfismos 'naturales' de grupo $\iota : N \to N \rtimes_\theta G$ y $\pi : N \rtimes_\theta G \to N$ tales que ι sea inyectivo, π sea sobreyectivo e $\operatorname{im} \iota = \ker \pi$.

(c) Mostrar que si $\theta = 1$ es el homomorfismo trivial, $N \rtimes_\theta G \cong N \times G$ es simplemente el producto directo.

6.5. *Producto semi-directo interno.* Sea K un grupo y sean G y N subgrupos de K con N normal en K. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(a) $K = NG$ y $N \cap G = \{1\}$;

(b) $K = GN$ y $N \cap G = \{1\}$;

(c) Todo elemento de K puede escribirse de forma única como un producto de un elemento de N por uno de G.

(d) Todo elemento de K puede escribirse de forma única como un producto de un elemento de G por uno de N.

(e) La composición de la inclusión $\mathrm{incl} :: G \hookrightarrow K$ con la proyección canónica $\mathrm{can} : K \twoheadrightarrow K/N$ es un isomorfismo $\tau : G \cong K/N$.

(f) Existe un homomorfismo $\sigma : K \to N$ que se restringe a la identidad de N y cuyo núcleo es N.

Además, cuando estas afirmaciones valen, existe un homomorfismo de grupos $\theta : G \to \mathsf{Aut}(N)$ y un isomorfismo de grupos $\xi : N \rtimes_\theta G \to K$ tales que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, "\iota"] \arrow[d] & N \rtimes_\theta G \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\xi"] & G \arrow[d, "\tau"] \\ N \arrow[r, hook, "\mathrm{incl}"] & K \arrow[r, two heads, "\mathrm{can}"] & K/N \end{tikzcd}$$

Los homomorfismos ι y π del diagrama fueron construidos en el ejercicio **6.4**.

6.6. Mostrar que $S_3 \cong \mathbb{Z}_3 \rtimes_\theta \mathbb{Z}_2$ para un homomorfismo $\theta : \mathbb{Z}_2 \to \mathsf{Aut}(\mathbb{Z}_3)$ apropiado.

6.7. Mostrar que S_n es el producto semi-directo de A_n y $\langle(1\,2)\rangle$.

†**6.8.** Mostrar que $\mathbb{H}$ no puede ser escrito como un producto semi-directo de forma no trivial.

†**6.9.** Sea G un grupo finito y $\phi : G \to G$ un endomorfismo de G y α el endomorfismo de G construido en el ejercicio **4.15**. Mostrar que G es el producto semi-directo de $\ker\alpha$ e $\operatorname{im}\alpha$.

7. Acciones

7.1. Si un grupo G actúa sobre un conjunto finito X, el *carácter* de X es la aplicación $\chi_X : G \to \mathbb{N}_0$ dada por

$$\chi_X(g) = |\{x \in X : gx = x\}|, \qquad \forall g \in G.$$

Si no hay ambigüedad sobre X, escribimos simplemente χ.

(a) Si G actúa transitivamente sobre X, es muestre que

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi(g) = 1.$$

Sugerencia. Considere el conjunto $S = \{(g,x) \in G \times X : gx = x\}$ y cuente sus elementos de dos formas distintas.

(b) En general, si la acción no es necesariamente transitiva, es

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi(g) = |X/G|.$$

Aquí, X/G es el conjunto de órbitas de G en X.

†*(c)* Si G actúa transitivamente sobre X y $x_0 \in X$, entonces, si G_{x_0} es el estabilizador de x_0 en G, es

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi(g)^2 = |X/G_{x_0}|.$$

Sugerencia. Una forma de hacer esto consiste en contar los elementos del conjunto $S = \{(g,x,y) \in G \times X \times X : gx = x,\ gy = y\}$ de dos formas distintas.

7.2. *Grupos lineales finitos.* Sea k un cuerpo finito de q elementos.

(a) Sea $V = k^2$ el k-espacio vectorial de vectores columna y sea X el conjunto de vectores no nulos de V. Mostrar que la acción de $\mathsf{GL}_2(k)$ sobre V por multiplicación a izquierda preserva a X y que la acción de $\mathsf{GL}_2(k)$ sobre X es transitiva.

(b) Sea $v_0 = (1,0)^t \in X$. Determinar el estabilizador $\mathsf{GL}_2(k)_{v_0}$ de v_0 en $\mathsf{GL}_2(k)$.

(c) Mostrar que $|\mathsf{GL}_2(k)| = (q^2-1)(q^2-q)$.

†*(d)* Más generalmente, mostrar que si $n \in \mathbb{N}$, es

$$|\mathsf{GL}_n(k)| = \prod_{i=0}^{n-1}(q^n - q^i).$$

†*(e)* Sea $n \in \mathbb{N}$. Muestre que el morfismo $\mathsf{det} : \mathsf{GL}_n(k) \to k^\times$ es sobreyectivo y concluya que

$$|\mathsf{SL}_n(k)| = \frac{1}{q-1}\prod_{i=0}^{n-1}(q^n - q^i).$$

7.3. *Subgrupos grandes.*

(a) Sea G un grupo finito y H un subgrupo de índice 2. Construya explícitamente un homomorfismo de grupos $f : G \to \mathbb{Z}_2$ tal que $\ker f = H$, mostrando en particular que H es normal.

El objetivo de lo que sigue es obtener una prueba de la siguiente proposición que generaliza a este resultado:

> **Proposición.** *Sea G un grupo finito, sea p el menor número primo que divide a $|G|$ y sea H un subgrupo de G de índice p. Entonces H es normal.*

Notemos que, en las condiciones de este enunciado G no puede poseer subgrupos de índice menor que p.

(b) Sea $X = G/H = \{gH : g \in G\}$ el conjunto de coclases a izquierda de H en G; así, $|X| = p$. Consideramos sobre X la acción usual de G por multiplicación, dada por

$$(g, hH) \in G \times X \mapsto ghH \in X.$$

y sea $\theta : G \to S(X)$ el homomorfismo de grupos correspondiente. Mostrar que si $K = \ker\theta$, se tiene que $H \supset K$ y, como $\operatorname{im}\theta$ es un subgrupo de $S(X)$, que $|G : K|$ divide a $p!$.

(c) Muestre que $|G:K| = |G:H|$, para concluir que $H = K$ y, así, que H es normal.

Sugerencia. Para hacerlo, observe primero que $p = |G:H| \leq |G:K|$, de manera que $|G:K| \neq 1$. Si q es un primo que divide a $|G:K|$, lo hecho en la parte anterior implica que $q \leq p$; esto junto con la elección de p implica que $|G:K| = p^r$ para algún $r \geq 1$. Muestre para terminar que debe ser $r = 1$.

8. Teoremas de Sylow

[1] **8.1.** Sea p un número primo. Un grupo abeliano finito de exponente p^r con $r > 0$ posee elementos de orden p.

[2] **8.2.** Sea p un número primo y G un grupo de orden $p^r > 1$. Entonces $\mathsf{Z}(G)$ no es trivial.

[2+] **8.3.** Sea G un grupo finito de orden $|G| = p^r m$ con p primo y $(p, m) = 1$. Entonces G posee subgrupos de orden p^r.

Definición. *Sea p un número primo. Un elemento g de G es* p-primario *si su orden es una potencia de p. Un grupo G es un* p-grupo *si el orden de todo elemento de G es una potencia de p.*

8.4. Sea p un número primo.

(a) Si G es un p-grupo y H es un subgrupo de G, entonces H es un p-grupo.

(b) Si G es un p-grupo y $f : G \to H$ es un homomorfismo sobreyectivo, H es un p-grupo.

(c) Si G es un grupo, H un subgrupo normal de G y tanto H como G/H son p-grupos, entonces G es un p-grupo.

[2] **8.5.** Un grupo finito G es un p-grupo sii $|G| = p^r$ para algún $r \geq 1$.

Definición. *Sea p un número primo y G un grupo. Un* p-subgrupo de Sylow *de G es un p-subgrupo maximal de G. Escribimos $\mathsf{Syl}_p(G)$ al conjunto de los p-subgrupos de Sylow de G.*

8.6. Sea G un grupo finito y p un número primo.

[1+] *(a)* Si $|G| = p^r m$ con $(p, m) = 1$ y $H \subset G$ es un subgrupo tal que $|H| = p^r$, entonces $H \in \mathsf{Syl}_p(G)$.

[1] *(b)* Si $p \mid |G|$, entonces $\mathsf{Syl}_p(G) \neq \varnothing$.

[1+] **8.7.** Si G es un grupo y $H \in \mathsf{Syl}_p(G)$ y $x \in G \setminus H$ tiene orden $|x| = p^n$, entonces $x \notin \mathsf{N}(H)$.

Sugerencia. Suponga lo contrario y considere el orden del elemento xH en $\langle H \cup \{x\} \rangle / H$.

8.8. Sea G un grupo finito y $K \in \mathsf{Syl}_p(G)$. Sea $\mathcal{C}$ el conjunto de subgrupos de G conjugados de K.

[1] *(a)* Sea $H \in \mathsf{Syl}_p(G)$ y sea $\sim$ la relación en $\mathcal{C}$ tal que

$$L \sim L' \text{ sii existe } h \in H \text{ tal que } hLh^{-1} = L.$$

Muestre que se trata de una relación de equivalencia.

[1+] *(b)* Sea $L \in \mathcal{C}$ y notemos $[L]$ a la clase de equivalencia de L. Entonces $|[L]| = [H : H \cap \mathsf{N}(L)]$. Además, si $L \neq H$ es $|[L]| > 1$ y es divisible por p. Si, por el contrario, $L = H$, entonces $|[H]| = 1$.

(c) Muestre que

$$|\mathcal{C}| \equiv \begin{cases} 0 \pmod{p}, & \text{si } H \notin \mathcal{C}; \\ 1 \pmod{p}, & \text{si } H \in \mathcal{C}. \end{cases}$$

(d) Concluya que H es conjugado de K y que $|\mathcal{C}| \cong 1 \pmod{p}$.

8.9. Pruebe el siguiente teorema de Peter Ludwig Mejdell Sylow (1832–1918, Noruega) que es, probablemente, el teorema más importante de la teoría de grupos finitos.

> **Teorema.** (M. L. Sylow, Théorèmes sur les groupes de substitutions, Math. Ann. **5** (1872), no. 4, 584–594.) *Sea p un número primo. Sea G un grupo finito de orden $p^r m$ con $(p, m) = 1$. Entonces*
>
> (a) *Un subgrupo H de G es un p-subgrupo de Sylow sii $|H| = p^r$.*
>
> (b) *Todos los p-subgrupos de Sylow de G son conjugados.*
>
> (c) *Sea n_p el número de p-subgrupos de Sylow de G. Entonces $n_p \equiv 1 \pmod{p}$.*
>
> (d) $n_p \mid m$.

8.10. Muestre que no hay grupos simples de orden 28 ó 312.

8.11. Muestre que un grupo de orden 12 ó 56 no es simple.

8.12. Si p y q son primos distintos, un grupo de orden pq no es simple.

8.13. Sea G un grupo de orden $p^r m$ con p primo, $r \geq 1$ y $p > m$. Entonces G no es simple.

8.14. Sea G un grupo de orden $p^2 q$ con p y q primos distintos. Entonces G no es simple.

8.15. Muestre que un grupo de orden menor que 60 no es simple.

8.16. Mostrar que si G es un grupo y P es un subgrupo de Sylow de G, entonces P es un subgrupo característico de $\mathsf{N}(P)$.

8.17. Si todos los subgrupos de Sylow de un grupo finito G son normales, entonces $G \cong \prod_{p \text{ primo}} P_p$. En particular, un grupo abeliano finito es producto de sus subgrupos de Sylow.

9. Varia

9.1. Grupos múltiplemente transitivos

Sea G un grupo y supongamos que G actúa fielmente sobre un conjunto X. Sea $k \geq 1$.

9.1.1. Mostrar que obtenemos una acción de G sobre X^k si definimos

$$g \cdot (x_1, \ldots, x_k) = (gx_1, \ldots, gx_k), \qquad \text{si } g \in g \text{ y } (x_1, \ldots, x_k) \in X^k.$$

Mostrar que si $|X| > 1$, la acción de G sobre X^k no es transitiva.

Definición. *Pongamos* $X^{(k)} = \{(x_1, \dots, x_n) \in X^k : x_i \neq x_j \text{ si } 1 \leq i < i \leq k\}$. *Diremos que la acción de G sobre X es* k-transitiva *si G actúa transitivamente sobre* $X^{(k)}$.

9.1.2. Mostrar que la acción canónica de S_n sobre $\{1, \dots, n\}$ es n-transitiva.

9.1.3. Mostrar que la acción canónica de A_n sobre $\{1, \dots, n\}$ es $(n-2)$-transitiva pero no $(n-1)$-transitiva.

9.1.4. Sea K un cuerpo, V un K-espacio vectorial. Mostrar que $\mathrm{Aut}_k(V)$ actúa 1-transitivamente sobre $V \setminus \{0\}$ pero no 2-transitivamente.

9.1.5. Sea otra vez K un cuerpo, V un K-espacio vectorial con $\dim_K \geq 2$, y sea X el conjunto de todos los subespacios de V de dimensión 1. Mostrar que la acción de $\mathrm{Aut}_K(V)$ sobre V induce una acción natural sobre X, que es 2-transitiva pero no 3-transitiva.

9.1.6. Mostrar que la acción sobre el conjunto de vértices de un tetraedro regular del grupo de rotaciones del sólido es 2- pero no 3-transitiva.

9.1.7. Sea A un grupo finito no trivial y $A' = A \setminus \{1\}$. Claramente $\mathrm{Aut}(A)$ actúa sobre A'.

(a) Si $\mathrm{Aut}(A)$ actúa 1-transitivamente en A', entonces existe un número primo p tal que todo elemento de A' es de orden p. Esto implica que A es un p-grupo, así que su centro no es trivial. Concluir que A es abeliano y entonces, usando el ejercicio **2.7**, que $G \cong \mathbb{Z}_p \times \cdots \times \mathbb{Z}_p$.

(b) Determinar todos los grupos A tales que $\mathrm{Aut}(A)$ actúa 2-transitivamente sobre A'.

Definición. *Diremos que la acción de G sobre X es* finamente k-transitiva *si es k-transitiva y además, para cada* $\forall (x_1, \dots, x_k) \in X^{(k)}$ *y cada* $g_1, g_2 \in G$*, es*

$$\forall i \in \{1, \dots, k\},\ g_1(x_i) = g_2(x_i) \implies g_1 = g_2.$$

En otras palabras, esta condición dice que dos elementos de G que actúan de la misma forma sobre k elementos de k deben coincidir.

9.1.8. Si la acción de G es finamente k-transitiva sobre X y $n = |X|$, entonces

$$|G| = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

9.1.9. La acción de S_n sobre $\{1, \dots, n\}$ es finamente n-transitiva, finamente $(n-1)$-transitiva pero no finamente $(n-2)$-transitiva.

9.1.10. La acción de A_n sobre $\{1, \dots, n\}$ es finamente $(n-2)$-transitiva.

9.1.11. *Acciones finamente 1-transitivas.* Este ejercicio describe todas las acciones finamente 1-transitivas.

(a) Sea G un grupo finito. Pongamos $R = G$ y consideremos la acción regular a izquierda $G \times R \to R$; recordemos que

$$g \cdot r = gr, \qquad \forall g \in G, r \in R.$$

Mostrar que la acción de G sobre R es finamente 1-transitiva.

(b) Sea G un grupo finito que actúa sobre un conjunto X no vacío de forma finamente 1-transitiva. Mostrar que existe una función biyectiva $\phi : R \to X$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} G \times R \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}_G \times \phi"'] & R \arrow[d, "\phi"] \\ G \times X \arrow[r] & X \end{tikzcd}$$

conmuta, si las flechas verticales están dadas por las acciones de G.

9.1.12. Sea K un cuerpo finito de q elementos.

(a) Consideremos el conjunto $\mathsf{AGL}(1, K) = K^\times \times K$ y dotémoslo de un producto dado por

$$(a, b) \cdot (a', b') = (aa', b + ab'), \qquad \forall (a, b), (a', b') \in \mathsf{AGL}(1, K).$$

Muestre que $(\mathsf{AGL}(1, K), \cdot)$ es un grupo.

(b) Consideremos ahora el conjunto $X = K$ y la aplicación $\mathsf{AGL}(1, K) \times K \to K$ dada por

$$(a, b) \cdot x = ax + b, \qquad \forall (a, b) \in \mathsf{AGL}(1, K), \forall x \in X.$$

Muestre que esto da una acción de $\mathsf{AGL}(1, K)$ sobre X.

(c) Muestre que esta acción es finamente 2-transitiva.

9.1.13. Sea G un grupo finito y sea X un conjunto no vacío sobre el que G actúa de forma finamente 2-transitiva.

(a) Sea $x_0 x \in X$ y $H = G_{x_0}$. Pongamos $X' = X \setminus \{x_0\}$. Entonces H actúa de forma finamente 1-transitiva sobre X' y es un subgrupo maximal de G.

(b) $H \cap gHg^{-1} \neq 1$ sii $g \in H$. En particular, $\mathsf{N}(H) = H$ y $C(h) \subset H$ para cada $h \in H \setminus \{1\}$.

(c) G posee involuciones y son todas conjugadas. Notemos I al conjunto de las involuciones de G.

(d) Sea $N' = \{g \in G : \text{para cada } x \in X, gx \neq x\}$ y $N = N' \cup \{1\}$. Entonces es $|N'| = n - 1$. Además, N es un subconjunto normal de G.

(e) La acción de N sobre X es simplemente transitiva.

(f) H posee a lo sumo una involución. Si H posee una involución, $|I| = n$; en caso contrario, $|I| = n - 1$.

(g) Si $s, t \in I$ y $s \neq t$, entonces st no tiene puntos fijos en X.

(h) Sea $j \in G \setminus H$ una involución. Si $H \cap I \neq \varnothing$, sea además i la única involución de H. Entonces

$$I = \begin{cases} j^H, & \text{si } H \cap I = \varnothing; \\ j^H \cup \{i\}, & \text{si } H \cap I \neq \varnothing. \end{cases}$$

Aquí $j^H = \{hjh^{-1} : h \in H\}$.

(i) Es $I^2 \setminus \{1\} = N'$ y N es un subgrupo normal abeliano de G. De hecho, si $H \cap I = \varnothing$, se tiene que $I = N'$. Más precisamente, existe un número primo p tal que $N \cong \mathbb{Z}_p \times \cdots \times \mathbb{Z}_p$, y $p = 2$ sii $H \cap I = \varnothing$.

(j) Si T es un subgrupo normal de G con $\mathsf{Z}(T) \neq 1$, entonces $G = \mathsf{Z}(T) \rtimes H$.

(k) $G \cong N \rtimes H$ con respecto a la acción por conjugación de H sobre N.

(l) Fijemos $x_1 \in X'$. Definimos una aplicación $\xi : N' \to H$ de la siguiente manera: si $n \in N'$, entonces $nx_0 \in X'$ porque n no deja fijo ningún elemento de X, así que como la acción de H sobre X' es simplemente transitiva, existe exactamente un elemento $\xi(n) \in H$ tal que $\xi(n)x_1 = nx_0$. Mostrar que ξ es una biyección.

(m) Fijemos $x_1 \in X'$. Definimos en X dos operaciones $\cdot$ y $+$ en X de la siguiente manera.

Sean $x, y \in X$. Si $x = x_0$, ponemos $x \cdot y = x_0$. Si $x \neq x_0$, existe exactamente un elemento $h \in H$ tal que $hx_1 = x$, y ponemos $x \cdot y = hy$. Por otro lado, sabemos que existe exactamente un elemento $n \in N$ tal que $nx_0 = x$; ponemos $x + y = ny$.

Mostrar que $(X, +)$ es un grupo abeliano isomorfo a N y que $(X', \cdot)$ es un grupo isomorfo a H.

(n) Mostrar que si H es abeliano, entonces $(X, +, \cdot)$ es un cuerpo K y que $G \cong \mathsf{AGL}(1, K)$.

9.2. Grupos nilpotentes

Sea G un grupo. Definimos una sucesión creciente

$$1 = Z_0 \subset Z_1 \subset \cdots \subset Z_n \subset \cdots$$

de subgrupos normales de G inductvamente de la siguiente manera, empezando por $Z_0 = 1$: sea $i \in \mathbb{N}_0$ y supongamos que ha hemos contruido Z_i. Como Z_i es normal, podemos considerar el homomorfismo canónico $\pi : G \to G/Z_i$. Ponemos entonces $Z_{i+1} = \pi^{-1}(\mathsf{Z}(G/Z_i))$; se trata claramente de un subgrupo normal de G, y es $Z_{i+1}/Z_i \cong \mathsf{Z}(G/Z_i)$. La sucesión de subgrupos $(Z_i)_{i\geq 0}$ se llama la *cadena central superior* de G.

Definición. *Si existe $n \in \mathbb{N}_0$ tal que $Z_n = G$, decimos que G es* nilpotente. *El menor tal n es la* longitud nilpotente *de G.*

9.2.1. Un grupo abeliano es nilpotente. ¿Es nilpotente S_3? Dé un ejemplo de un grupo nilpotente y no abeliano.

Definición. *Una sucesión creciente $(N_i)_{i\geq 0}$ de subgrupos normales de un grupo G tal que $N_0 = 1$ y $N_{i+1}/N_i \subset \mathsf{Z}(G/N_i)$ para cada $i \geq 0$ es una* cadena central ascendente. *Si existe $n \in \mathbb{N}_0$ tal que $N_i = G$ entonces decimos que la cadena* termina *o que* llega *a G.*

9.2.2. Si G es un grupo y $(N_i)_{i\geq 0}$ es una cadena central ascendente en G, muestre que para cada $i \geq 0$ se tiene que $[N_{i+1}, G] \subset N_i$.

9.2.3. Si G es un grupo y $(Z_i)_{i\geq 0}$ es su cadena central superior, entonces para cada $i \geq 0$ se tiene que $Z_{i+1} = \{g \in G : [g, G] \subset Z_i\}$.

9.2.4. Mostrar que si un grupo G posee una cadena central ascendente $(N_i)_{i\geq 0}$ que llega a G, entonces es nilpotente. Una forma de hacer esto es ver que $N_i \subset Z_i$ para cada $i \geq 0$.

9.2.5. Sea G un grupo tal que $G/\mathsf{Z}(G)$ es nilpotente. Entonces G es nilpotente.

9.2.6. Un p-grupo finito es nilpotente.

9.2.7. Los subgrupos Z_i que aparecen en la serie central de G son subgrupos característicos en G.

Esto puede verse por inducción en i, siendo inmediato para $i = 0$. Para ver que Z_{i+1} es característico en G si Z_i lo es, proceda de la siguiente manera: muestre que todo $\alpha \in \mathsf{Aut}(G)$ induce, de manera natural, un automorfismo $\bar{\alpha} \in \mathsf{Aut}(G/Z_i)$ tal que conmuta

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, two heads] \arrow[d, "\alpha"'] & G/Z_i \arrow[d, "\bar{\alpha}"] \\ G \arrow[r, two heads] & G/Z_i \end{tikzcd}$$

Usando que el centro de un grupo es característico, concluir que Z_{i+1} es característico.

9.2.8. Un cociente de un grupo nilpotente es nilpotente. Para mostrarlo, considere un homomorfismo es $f : G \to G'$ con dominio G nilpotente y verifique que si $(Z_i)_{i\geq 0}$ es la cadena central superior de G, entonces $(f(Z_i))_{i\geq 0}$ es una cadena central ascendente de G' que termina en G'.

9.2.9. Todo subgrupo de un grupo nilpotente es nilpotente.

9.2.10. Todo producto de grupos nilpotentes es nilpotente.

9.2.11. Si G es nilpotente y N es normal en G, entonces $N \cap \mathsf{Z}(G) \neq 1$.

9.2.12. Todo subgrupo propio de un grupo nilpotente está estrictamente contenido en su normalizador. En particular, todo subgrupo maximal es normal.

9.2.13. Si G es nilpotente y $P \subset G$ es un subgrupo de Sylow de G, entonces P es normal y, en particular, único.

9.2.14. Si G es nilpotente y finito y para cada primo p, P_p es el p-subgrupo de Sylow, entonces $G \cong \prod_p P_p$.

Esta serie de ejercicios prueba el siguiente teorema:

> **Teorema.** *Un grupo finito es nilpotente sii es isomorfo al producto de sus subgrupos de Sylow.*

William Burnside
1852–1927, Inglaterra

William Burnside fue el primero en desarrollar la teoría de grupos desde el punto de vista abstracto. Publicó en 1897 *The Theory of Groups of Finite Order*, el primer libro sobre la teoría de grupos publicado en inglés. En 1904 demostró que todo grupo de orden $p^n q^m$ es soluble, uno de sus resultados más importantes, y conjeturó que todo grupo de orden impar es soluble. Este último resultado fue obtenido en 1962 por Walter Feit y John Griggs Thompson, quienes dieron una demostración de 250 páginas (Feit, W. y Thompson, J. G. Solvability of Groups of Odd Order. Pacific J. Math. 13, 775-1029, 1963)