

---

# ÁLGEBRA II

## Primer Cuatrimestre — 2007

### Práctica 4: Módulos

---

#### 1. Módulos y morfismos

1.1. Sea  $A$  un anillo,  $n \geq 1$  y  $M \in M_{m,n}(A)$ . Muestre que la multiplicación matricial da un morfismo de  $A$ -módulos

$$f : x \in A^n \mapsto Mx \in A^m.$$

1.2. Sea  $A$  un anillo.

- (a) Sea  $M$  un  $A$ -módulo a izquierda. Si definimos un producto  $M \times A^{\text{op}} \rightarrow M$  poniendo  $m \cdot a = am$ , podemos dotar a  $M$  de una estructura de  $A^{\text{op}}$ -módulo a derecha. Lo notamos  $M^{\text{op}}$ .
- (b) Si  $f : M \rightarrow N$  es un morfismo de  $A$ -módulos a izquierda, entonces  $f : M^{\text{op}} \rightarrow N^{\text{op}}$  es un morfismo de  $A^{\text{op}}$ -módulos a derecha.
- (c) Recíprocamente, todo  $A^{\text{op}}$ -módulo a derecha es de la forma  $M^{\text{op}}$  para algún  $A$ -módulo a izquierda  $M$  y todo morfismo de  $A^{\text{op}}$ -módulos está inducido como en la parte anterior.

1.3. Sean  $N$  y  $M$  dos  $\mathbb{Q}$ -módulos. Muestre que una función  $f : N \rightarrow M$  es un morfismo de  $\mathbb{Q}$ -módulos sii es un morfismo de grupos abelianos.

1.4. Sea  $A$  un anillo y  $N, M$  dos  $A$ -módulos.

- (a) Muestre que  $\text{hom}_A(M, N)$  es un grupo abeliano con suma dada por

$$(f + g)(m) = f(m) + g(m), \quad \forall f, g \in \text{hom}_A(M, N), \forall m \in M.$$

- (b) Sea  $Z(A)$  el centro de  $A$ . Definimos una operación

$$Z(A) \times \text{hom}_A(M, N) \rightarrow \text{hom}_A(M, N)$$

poniendo

$$(a \cdot f)(m) = f(am), \quad \forall f \in \text{hom}_A(M, N), \forall a \in Z(A), \forall m \in M.$$

Muestre que esto hace de  $\text{hom}_A(M, N)$  un  $Z(A)$ -módulo.

- (c) Muestre que para todo  $A$ -módulo  $M$  existe un isomorfismo de  $Z(A)$ -módulos  $\text{hom}_A(A, M) \rightarrow M$ .
- 1.5. (a) Sean  $A, B$  y  $C$  anillos y sean  $M$  un  $(A, B)$ -bimódulo y  $N$  un  $(A, C)$ -bimódulo. Muestre que el grupo abeliano  $\text{hom}_A(M, N)$  posee una única estructura de  $(B, C)$ -bimódulo tal que

$$(b \cdot f \cdot c)(m) = f(mb)c, \quad \forall b \in B, \forall c \in C, \forall m \in M.$$

- (b) Sea  $A$  un anillo y  $M$  un  $A$ -módulo a izquierda. Considerando a  $A$  como  $(A, A)$ -bimódulo, muestre que hay un isomorfismo de  $A$ -módulos a izquierda  $\text{hom}_A(A, M) \cong M$ .

**1.6.** Cambios de anillo. Sea  $\phi : A \rightarrow B$  un morfismo de anillos.

- (a) Muestre que si definimos un producto  $A \times B \rightarrow B$  poniendo

$$a \cdot b = \phi(a)b$$

dotamos a  $B$  de una estructura de  $A$ -módulo a izquierda sobre  $B$ . De forma similar podemos obtener una estructura de  $A$ -módulo a derecha y de  $A$ -bimódulo sobre  $B$ .

- (b) Sea  $M$  un  $B$ -módulo a izquierda. Muestre que el producto  $A \times M \rightarrow M$  dado por  $a \cdot m = \phi(a)m$  hace de  $M$  un  $A$ -módulo a izquierda. Lo notamos  $\phi^*(M)$ .
- (c) Si  $f : M \rightarrow N$  es un morfismo de  $B$ -módulos a izquierda, entonces  $f : \phi^*(M) \rightarrow \phi^*(N)$  es un morfismo de  $A$ -módulos a izquierda. Lo notamos  $\phi^*(f)$ .
- (d) Si  $M$  y  $N$  son  $B$ -módulos a izquierda, la aplicación

$$\phi^* : f \in \text{hom}_B(M, N) \mapsto \phi^*(f) \in \text{hom}_A(\phi^*(M), \phi^*(N))$$

es un morfismo de grupos abelianos.

- (e) Si  $M, N$  y  $P$  son  $B$ -módulos a izquierda y  $f : M \rightarrow N$  y  $g : N \rightarrow P$  son morfismos de  $B$ -módulos, entonces

$$\phi^*(g \circ f) = \phi^*(g) \circ \phi^*(f).$$

En particular, la aplicación  $\phi^* : \text{End}_B(M) \rightarrow \text{End}_A(\phi^*(M))$  es un morfismo de anillos.

- (f) De condiciones sobre  $\phi$  que impliquen que la aplicación

$$\phi^* : \text{hom}_B(M, N) \rightarrow \text{hom}_A(\phi^*(M), \phi^*(N))$$

sea inyectiva (sobreyectiva) cualesquiera sean los  $B$ -módulos  $M$  y  $N$ .

**1.7.** Sea  $A$  un anillo,  $M$  un  $A$ -módulo a izquierda y sea  $B = \text{End}_A(M)$  el anillo de endomorfismos de  $M$ .

- (a) Muestre que  $M$  es un  $B$ -módulo a derecha de manera natural y que con esa estructura resulta de hecho un  $(A, B)$ -bimódulo.
- (b) ¿Qué relación hay entre  $A$  y  $\text{End}_B(M)$ ?

**1.8.** Sea  $A$  un anillo.

- (a) Sea  $f : M \rightarrow M'$  un morfismo de  $A$ -módulos a izquierda. Para cada  $A$ -módulo a izquierda definimos un aplicaciones

$$f_P^* : h \in \text{hom}_A(M', P) \mapsto h \circ f \in \text{hom}_A(M, P)$$

y

$$f_*^P : h \in \text{hom}_A(P, M) \mapsto f \circ h \in \text{hom}_A(P, M').$$

Se trata de morfismos de grupos abelianos.

- (b) Sean  $f : M \rightarrow M'$  y  $g : M' \rightarrow M''$  morfismos de  $A$ -módulos. Entonces para cada  $A$ -módulo a izquierda  $P$  vale que

$$f_P^* \circ g_P^* = (g \circ f)_P^*$$

y

$$g_*^P \circ f_*^P = (g \circ f)_*^P.$$

- (c) Una sucesión de  $A$ -módulos a izquierda

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''$$

es exacta sii la sucesión de grupos abelianos

$$0 \longrightarrow \text{hom}_A(N, M') \xrightarrow{f_*^N} \text{hom}_A(N, M) \xrightarrow{g_*^N} \text{hom}_A(N, M'')$$

es exacta para todo  $A$ -módulo a izquierda  $N$ . ¿Hay un enunciado similar que involcre a los morfismos  $f_N^*$  y  $g_N^*$ ?

- (d) ¿Es cierto que si

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta de  $A$ -módulos a izquierda entonces

$$0 \longrightarrow \text{hom}_A(N, M') \xrightarrow{f_*^N} \text{hom}_A(N, M) \xrightarrow{g_*^N} \text{hom}_A(N, M'') \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta de grupos abelianos?

**1.9.** Un  $A$ -módulo  $M$  es simple sii para todo  $m \in M \setminus 0$ ,  $Am = M$ .

**1.10.** (a) *Lema de Schur.* Sea  $f : M \rightarrow N$  un morfismo de  $A$ -módulos.

- i) Si  $M$  es simple, entonces  $f$  es o bien nula o bien inyectiva.
- ii) Si  $N$  es simple, entonces  $f$  es o bien nula o bien sobreyectiva.
- iii) Si  $M$  y  $M$  son simples, entonces  $f$  es o bien nula o bien un isomorfismo.

(b) Si  $M$  es un  $A$ -módulo simple,  $\text{End}_A(M)$  es un anillo de división.

**1.11.** Sea  $A$  un dominio íntegro y sean  $v_1, \dots, v_n \in A^n$ . Sea  $M \in M_n(A)$  la matriz cuyas columnas son los vectores  $v_1, \dots, v_n$ .

- (a) El conjunto  $\{v_1, \dots, v_n\}$  es linealmente independiente si  $\det M \neq 0$ .
- (b) El conjunto  $\{v_1, \dots, v_n\}$  es un sistema de generadores si  $\det M \in A^\times$ .

**1.12.** (a) Todo módulo de tipo finito posee un conjunto generador minimal.

- (b) Para todo  $n \in \mathbb{N}$  existe un conjunto generador minimal de  $\mathbb{Z}$  de cardinal  $n$ .

**1.13.** Sea  $k$  un cuerpo y  $V$  un  $k$ -espacio vectorial. Sea  $f \in \text{End}_k(V)$ . Muestre que existe exactamente una estructura de  $k[X]$ -módulo a izquierda sobre  $V$  para la cual  $k \subset k[X]$  actúa por multiplicación escalar y

$$X \cdot v = f(v), \quad \forall v \in V.$$

1.14. Sea  $A$  un anillo y  $M$  un  $A$ -módulo a izquierda.

- (a) El conjunto  $\text{ann } M = \{a \in A : am = 0, \forall m \in M\}$  es un ideal a izquierda de  $A$ . Si  $\text{ann } M = 0$ , decimos que  $M$  es un  $A$ -módulo *fiel*.  
 (b) De ejemplos de módulos fieles.

## 2. Condiciones de cadena

2.15. Un  $A$ -módulo es finitamente generado si es isomorfo a un cociente de  $A^n$  para algún  $n \in \mathbb{N}$ .

2.16. Si

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta corta de  $A$ -módulos a izquierda y  $M'$  y  $M''$  son finitamente generados, entonces  $M$  es finitamente generados.

2.17. Sea  $A$  un anillo,  $M$  un  $A$ -módulo a izquierda finitamente generado y sea  $f : M \rightarrow A^n$  un morfismo sobreyectivo de  $A$ -módulos. Muestre que  $\ker f$  es finitamente generado.

2.18. Muestre que existen módulos finitamente generados y no Nötherianos y módulos tales que todos sus submódulos propios son finitamente generados pero que no son Nötherianos.

2.19. Un  $k$ -espacio vectorial  $V$  es nötheriano sii  $\dim_k V < \infty$ .

2.20. Un anillo principal a izquierda es Nötheriano a izquierda.

2.21. Sean  $A$  un anillo,  $M$  un  $A$ -módulo a izquierda y  $f \in \text{End}_A(M)$ . Si  $n \in \mathbb{N}_0$ , pongamos  $K_n = \ker f^n$  y  $I_n = \text{im } f^n$ . Entonces

- (a)  $K_1 = K_2 \implies K_1 \cap I_1 = 0$ ;  
 (b)  $I_1 = I_2 \implies K_1 + I_1 = M$ ;  
 (c) si  $M$  es Nötheriano, existe  $n \in \mathbb{N}_0$  tal que  $K_n \cap I_n = 0$ ;  
 (d) si  $M$  es Nötheriano y  $f$  es sobreyectivo, entonces  $f$  es un automorfismo.

2.22. Sea  $d \in \mathbb{Z}$  y sea  $\sqrt{d} \in \mathbb{C}$  una raíz cuadrada de  $d$ . Muestre que el anillo  $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$  es nötheriano.

2.23. Sea  $k$  un cuerpo,  $V$  un  $k$ -espacio vectorial de dimensión infinita y  $A = \text{End}_k(V)$  el anillo de endomorfismos de  $V$ . Muestre que existe un  $A$ -módulo  $M$  no nulo tal que  $M \cong M \oplus M$ .

## 3. Algunos lemas usuales

3.24. (a) Sea

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & M' & \longrightarrow & M & \longrightarrow & M'' \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow f' & & \downarrow f & & \downarrow f'' \\ 0 & \longrightarrow & N' & \longrightarrow & N & \longrightarrow & N'' \longrightarrow 0 \end{array}$$

un diagrama conmutativo de  $A$ -módulos izquierdos en el que las filas son exactas. Entonces existe exactamente un morfismo  $f'' : M'' \rightarrow N''$  que completa el diagrama preservando la conmutatividad.

(b) Si  $f'$  y  $f$  son isomorfismos, entonces  $f''$  es un isomorfismo.

**3.25. Lema de los cinco.** Consideremos un diagrama conmutativo de  $A$ -módulos izquierdos

$$\begin{array}{ccccccccc}
 M_1 & \longrightarrow & M_2 & \longrightarrow & M_3 & \longrightarrow & M_4 & \longrightarrow & M_5 \\
 \downarrow \alpha_1 & & \downarrow \alpha_2 & & \downarrow \alpha_3 & & \downarrow \alpha_4 & & \downarrow \alpha_5 \\
 N_1 & \longrightarrow & N_2 & \longrightarrow & N_3 & \longrightarrow & N_4 & \longrightarrow & N_5
 \end{array}$$

y supongamos que las dos filas son exactas.

(a) Si  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$  y  $\alpha_5$  son isomorfismos, entonces  $\alpha_3$  es un isomorfismo.

(b) Si  $\alpha_1$  es sobreyectivo y  $\alpha_2$  y  $\alpha_4$  son inyectivos, entonces  $\alpha_3$  es inyectivo.

(c) Si  $\alpha_5$  es inyectivo y  $\alpha_2$  y  $\alpha_4$  son sobreyectivos, entonces  $\alpha_3$  es sobreyectivo.

**3.26. Lema de los nueve.** Consideremos un diagrama de  $A$ -módulos izquierdos

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & M' & \longrightarrow & M & \longrightarrow & M'' \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & N' & \longrightarrow & N & \longrightarrow & N'' \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & P' & \longrightarrow & P & \longrightarrow & P'' \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

en el que las tres columnas y las dos primeras (o las dos últimas) filas son exactas. Entonces la tercera fila también es exacta.



Bartel Leendert van der Waerden  
1903–1996, Bélgica y Suiza.

van der Waerden publicó en 1930 su obra más conocida, el libro *Algebra*, basado en parte en notas de Emmy Nöther y Émil Artin, en el que dio forma a lo que hoy entendemos por álgebra.